

Homothetien in der euklidischen Geometrie

Masterarbeit von Viktor Fast
betreut von Prof. Dr. Thomas Zink

Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Eigenschaften von Homothetien	5
2.1	Definition	5
2.2	Fixelemente von Homothetien	5
2.3	Konstruktion weiterer Punkte	8
2.4	Streckfaktoren von Homothetien	9
2.5	Affinität und Bijektivität von Homothetien	13
2.6	Verknüpfungen von Homothetien	14
2.7	Inverse Homothetien	19
2.8	Eindeutigkeit von Homothetien	20
2.9	Gruppeneigenschaften von Homothetien	23
2.10	Homothetien im Raum	25
3	Anwendungen	26
3.1	Strecke in n gleiche Teile zerlegen	26
3.2	Strecke mit beliebigem Faktor multiplizieren	27
3.3	Flächeninhalt von Figuren beliebig vergrößern	27
3.4	Beweis der Strahlensätze durch Homothetie	28
3.5	Tangente an zwei Kreisen konstruieren	29
3.6	Konstruktion eines Kreises durch zwei gegebene Punkte und einer gegebenen Tangente	31
3.7	Eine Sekantenkonstruktion	32
3.8	Quadrat im Dreieck einbinden	34
3.9	Dreieck durch seine Höhen konstruieren	34
3.10	Konstruktion einer Parallelen mit Lineal und einer gegebenen Längeneinheit	36
3.11	Die Eulergerade	38
3.12	Der Feuerbachkreis	39
	Literaturverzeichnis	42

1 Einleitung

Eine Homothetie ist eine Abbildung in der euklidischen Geometrie, bei der Geraden auf zu sich parallele Geraden abgebildet werden. Inhaltlich ist die Homothetie also eng mit dem Sachverhalt der Strahlensätze verknüpft. Die Lehre der Homothetie erlaubt es folglich, diese Sachverhalte aus einer neuen dynamischen Perspektive zu betrachten.

Im zweiten Kapitel wird gezeigt, dass alle Eigenschaften der Homothetie von dieser simplen Definition abgeleitet werden können. Dazu soll zunächst anhand der Definition der Homothetie untersucht werden, welche Elemente bei homothetischen Abbildungen fix bleiben. Anschließend wird erläutert, wie weitere Punkte konstruiert werden, wenn eine Homothetie durch zwei Punkte und ihre Bildpunkte gegeben ist.

Daran anknüpfend werden die Streckfaktoren von Homothetien erklärt, wobei ein besonderes Augenmerk auf den Fall, dass der Streckfaktor kleiner als 0 ist, gelegt wird. Schließlich soll eine Klassifikation von Homothetien erfolgen. Hier soll danach gefragt werden, welche verschiedenen Arten von Homothetien es gibt. Im darauf folgenden Abschnitt wird dann anhand der Eigenschaften der Homothetien gezeigt, dass diese sowohl affin als auch bijektiv sind.

Im Anschluß daran werden die Verknüpfungen von Homothetien untersucht. Hier wird zunächst gezeigt, dass die Verknüpfung von Homothetien abgeschlossen und assoziativ jedoch nicht kommutativ ist. Dann wird der Fokus auf die Konstruktion bzw. die Berechnung der Verknüpfung von Homothetien gelegt. Im darauf folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass Homothetien invertierbar sind, wobei zwischen den verschiedenen Arten von Homothetien unterschieden wird. Schließlich werden die Gruppeneigenschaften von Homothetien untersucht. Dabei wird auch danach gefragt, ob die verschiedenen Arten von Homothetien Untergruppen in der Gruppe der Verknüpfung aller Homothetien sind und in welcher Abbildungsgruppe Homothetien eine Untergruppe sind. Im anschließenden Abschnitt wird kurz erläutert, dass Homothetien auch eine Abbildung des Raumes auf sich sein können, wobei alle Eigenschaften erhalten bleiben.

In Kapitel 3 wird gezeigt, bei welchen Arten von Konstruktionsaufgaben Homothetien genutzt und welche Beweise durch Homothetien vereinfacht werden können. Insgesamt

soll also gezeigt werden, dass die einfache Definition und die vielseitige Nutzbarkeit der Homothetien dafür sprechen, dass sie in der Ähnlichkeitslehre eine wichtige Rolle spielen.

2 Eigenschaften von Homothetien

2.1 Definition

Der Begriff *Homothetie*, der von dem französischen Mathematiker Michel Chasles geprägt wurde, setzt sich aus zwei Elementen griechischen Ursprungs zusammen: aus dem Wort *homo* - für *ähnliches* und dem Wort *thesis* für *Position*. Homothetie bedeutet in der Geometrie folglich die Korrespondenz zwischen zwei Figuren, die zueinander ähnlich sind und dieselbe Orientierung haben [1].

Definition 2.1. *Eine Abbildung der Ebene auf sich ist eine Zuordnung, bei der jedem Punkt der Ebene genau ein Bildpunkt der Ebene zugeordnet wird.*

Notation 2.2. *Eine Abbildung f der Ebene $\mathbb{E}$ auf sich wird im Folgenden notiert als $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$.*

Notation 2.3. *Sei $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Abbildung und P ein Punkt der Ebene. Dann wird der Bildpunkt von P im Folgenden notiert als $f(P)$.*

Definition 2.4. *Eine **Homothetie** ist eine Abbildung der Ebene auf sich, bei der jede Gerade der Ebene auf eine zu sich parallele Gerade abgebildet wird.*

Das heißt: Ist $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie, dann gilt für jede Gerade g der Ebene $\mathbb{E}$: Die Bildgerade $\phi(g)$ ist parallel zur Geraden g .

2.2 Fixelemente von Homothetien

Notation 2.5. *Verläuft eine Gerade durch zwei verschiedene Punkte, so ist sie durch diese Punkte eindeutig festgelegt. Im Folgenden wird eine Gerade, die durch zwei verschiedene Punkte A und B verläuft, als Gerade AB notiert.*

Definition 2.6. *Seien $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie und $g \in \mathbb{E}$ eine Gerade. Dann heißt g bezüglich ϕ invariant, wenn ϕ die Gerade g auf sich abbildet.*

Lemma 2.7. *Sei $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie. Wenn eine Gerade g durch einen Punkt $A \in \mathbb{E}$ und seinen Bildpunkt $\phi(A)$ verläuft, ist sie bezüglich ϕ invariant.*

Beweis. (i) Im Fall $\phi(A) \neq A$ gilt für jeden Punkt P auf der Geraden $A\phi(A)$ nach der Definition der Homothetie (vgl. Definition 2.4), dass die Gerade PA parallel zur Geraden $\phi(P)\phi(A)$ sein muss. Und da P , A und $\phi(A)$ kollinear sind, folgt daraus, dass $\phi(P)$ ebenfalls auf der Geraden $A\phi(A)$ liegt. Es wird also jeder Punkt, der auf der Geraden $\phi(A)A$ liegt, wieder auf $\phi(A)A$ abgebildet. Die Gerade $\phi(A)A$ wird folglich durch ϕ auf sich abgebildet.

(ii) Im Fall $\phi(A) = A$ gilt für jeden Punkt $P \in \mathbb{E}$, dass die Gerade AP parallel zur Geraden $\phi(A)\phi(P)$ verläuft. Und da A , $\phi(A)$ und P kollinear sind, liegt auch $\phi(P)$ auf der Geraden AP . Daraus folgt, dass jede Gerade, die durch $\phi(A)$ und A läuft, durch bezüglich ϕ invariant ist.

Q.E.D.

Definition 2.8. *Seien $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie und F ein Punkt der Ebene $\mathbb{E}$. Dann heißt F bezüglich ϕ Fixpunkt, wenn ϕ den Punkt F auf sich abbildet.*

Lemma 2.9. *Seien $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie und $g \neq h$ zwei invariante Geraden bezüglich ϕ . Dann ist der Schnittpunkt F von g und h ein Fixpunkt von ϕ .*

Beweis. Da F sowohl auf der Geraden g als auch auf der Geraden h liegt und die beiden Geraden invariant sind, folgt, dass $\phi(F)$ ebenfalls auf g und h liegt. Aufgrund dessen ist $\phi(F)$ ebenfalls der Schnittpunkt von g und h . F wird also durch ϕ auf sich abgebildet.

Q.E.D.

Definition 2.10. *Eine Abbildung, die jeden Punkt auf sich abbildet, heißt identische Abbildung oder auch Identität. Im Folgenden wird die identische Abbildung als id notiert.*

Lemma 2.11. *Hat eine Homothetie $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ zwei Fixpunkte, dann gilt: $\phi = id$.*

Beweis. Seien $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie, P und Q zwei verschiedene Punkte der Ebene $\mathbb{E}$, für die gilt: $\phi(P) = P$ und $\phi(Q) = Q$. Dann gilt für jeden Punkt T , der nicht auf der Geraden PQ liegt, dass die Gerade TP nach Lemma 2.7 invariant ist. Ebenso ist die Gerade TQ invariant. Und da TQ und PT invariant sind, ist T nach Lemma 2.9 ein Fixpunkt.

Für jeden Punkt S auf der Geraden PQ gilt: Die Geraden ST und SQ sind nach Lemma 2.7 invariant. Somit ist auch S nach Lemma 2.9 fix. Das bedeutet, dass alle Punkte der

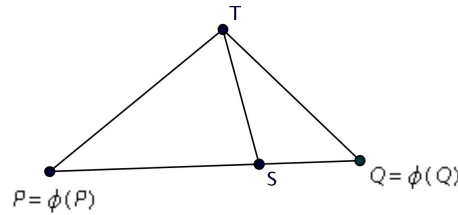


Abbildung 2.1: Skizze zu Lemma 2.11

Ebene $\mathbb{E}$ durch die Homothetie ϕ auf sich abgebildet werden, wenn ϕ zwei Fixpunkte hat. (vgl. Abbildung 2.1). Q.E.D.

Korollar 2.12. *Eine Homothetie $\phi \neq id$ kann höchstens einen Fixpunkt haben.*

Korollar 2.13. *Hat eine Homothetie $\phi \neq id$ einen Fixpunkt F , dann verlaufen alle invarianten Geraden von ϕ durch F .*

Beweis. Der Fixpunkt F ist der Schnittpunkt von zwei invarianten Geraden. Würde eine weitere invariante Gerade nicht durch F verlaufen, so würden weitere Fixpunkte entstehen und ϕ somit die Identität sein. Aufgrunddessen verlaufen alle invarianten Geraden durch den Fixpunkt von ϕ , wenn ϕ nicht die Identität ist. Q.E.D.

Korollar 2.14. *Sind zwei Geraden bezüglich einer Homothetie $\phi \neq id$ invariant und parallel zueinander, dann sind alle invarianten Geraden von ϕ parallel zueinander. Die Homothetie ϕ hat dann keinen Fixpunkt.*

Beweis. Wenn zwei invariante Geraden einer Homothetie ϕ parallel zueinander sind und eine dritte invariante Gerade von ϕ nicht parallel zu diesen beiden ist, entstehen zwei Schnittpunkte der invarianten Geraden und somit zwei Fixpunkte der Homothetie. Folglich wäre ϕ die Identität. Deswegen sind alle invarianten Geraden einer Homothetie parallel zueinander, wenn zwei invarianten Geraden parallel zueinander sind und ϕ nicht die Identität ist. Q.E.D.

Beispiel 2.15 (Konstruktion des Fixpunktes). *Sei eine Homothetie $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ gegeben durch zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathbb{E}$ und ihre Bildpunkte $\phi(A)$ und $\phi(B)$. Da die Geraden $\phi(A)A$ und $\phi(B)B$ bezüglich ϕ invariant sind, ist der Schnittpunkt F von $\phi(A)A$ und $\phi(B)B$ der Fixpunkt von ϕ (vgl. Abbildung 2.2).*

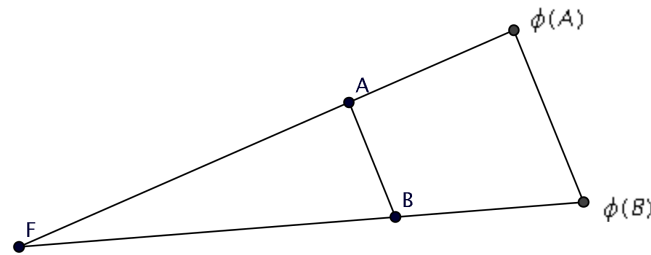


Abbildung 2.2: Konstruktion des Fixpunktes

2.3 Konstruktion weiterer Punkte

Lemma 2.16. Seien $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie und A, B, C drei Punkte in der Ebene $\mathbb{E}$, die nicht auf einer Geraden liegen. Zudem seien $\phi(A)$ und $\phi(B)$ gegeben. Wird nun eine Parallele zu AC durch $\phi(A)$ und eine Parallele zu BC durch $\phi(B)$ gelegt, dann ist $\phi(C)$ der Schnittpunkt dieser Parallelen (vgl. Abbildung 2.3).

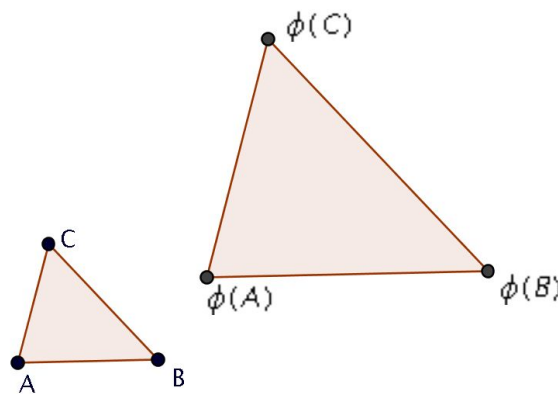


Abbildung 2.3: Beispiel einer homothetischen Abbildung

Beweis. Da die Gerade $\phi(A)\phi(C)$ parallel zur Geraden AC und die Gerade $\phi(B)\phi(C)$ parallel zur Geraden BC sein muss, ist der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch $\phi(A)$ mit der Parallelen zu BC durch $\phi(B)$ der gesuchte Punkt $\phi(C)$. *Q.E.D.*

Korollar 2.17. Seien $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie, A, B, D drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden $g \in \mathbb{E}$ und die Punkte $\phi(A)$ und $\phi(B)$ gegeben. Um den Punkt $\phi(D)$ zu konstruieren, muss zunächst ein Punkt $C \in \mathbb{E}$ gewählt werden, der nicht auf g liegt. Nun wird $\phi(C)$, wie in Lemma 2.16 beschrieben, konstruiert. Schließlich wird der Punkt $\phi(D)$ von den Punkten $A, C, \phi(A), \phi(C)$ aus, wie in Lemma 2.16 beschrieben, konstruiert.

Lemma 2.18. *Sei $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie, F der Fixpunkt von ϕ , A ein beliebiger Punkt in der Ebene $\mathbb{E}$ und $\phi(A)$ sein Bildpunkt. Dann gilt für alle weiteren Punkte $B \in \mathbb{E}$, dass $\phi(B)$ der Schnittpunkt von FB mit der Parallelen zu AB durch $\phi(A)$ ist.*

Beweis. Da F der Fixpunkt von ϕ ist, liegt der Punkt $\phi(B)$ nach Lemma 2.7 auf der Geraden FB . Außerdem muss die Gerade $\phi(A)\phi(B)$ parallel zur Geraden AB sein. Folglich ist $\phi(B)$ der Schnittpunkt von FB mit der Parallelen zu AB durch $\phi(A)$. *Q.E.D.*

2.4 Streckfaktoren von Homothetien

Notation 2.19. *Die Länge einer Strecke zwischen einem Punkt A und einem Punkt B wird im Folgenden notiert als $|AB|$.*

Definition 2.20. *Eine gerichtete Strecke mit dem Startpunkt A und dem Endpunkt B ist festgelegt durch die Orientierung von A nach B und durch die Länge $|AB|$. Dabei ist zu beachten, dass die gerichtete Strecke von A nach B nicht an die Punkte A und B gebunden ist, sondern nur durch diese in Länge und Richtung definiert ist. Eine gerichtete Strecke mit dem Startpunkt A und dem Endpunkt B wird im Folgenden notiert als $\overrightarrow{AB}$.*

Insbesondere gilt für gerichtete Strecken: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Notation 2.21. *Ein Winkel, der durch das Winkelfeld von der Geraden AB aus auf die Gerade AC mit dem Scheitel im Punkt A definiert ist, wird im Folgenden als $\sphericalangle(BAC)$ notiert. Die Größe eines Winkels wird im Folgenden als Bogenmaß angegeben. Beispielsweise hat ein rechter Winkel das Bogenmaß $\frac{\pi}{2}$.*

Notation 2.22. *Ein Dreieck, das durch die Eckpunkte A, B, C definiert ist, wird im Folgenden als $\triangle ABC$ notiert.*

Lemma 2.23. *Zu jeder Homothetie $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ gibt es eine reelle Zahl $x \neq 0$, sodass für alle Punkte A, B der Ebene $\mathbb{E}$ gilt:*

$$x \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}.$$

Die Zahl x heißt dann der Streckfaktor von ϕ .

Beweis. Seien A, B, C drei Punkte der Ebene $\mathbb{E}$, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann gilt nach der Definition der Homothetie, dass AB parallel zu $\phi(A)\phi(B)$, BC parallel zu

$\phi(B)\phi(C)$ und AC parallel zu $\phi(A)\phi(C)$ ist. Daraus ergeben sich folgende Winkelrelationen:

$$\sphericalangle(CBA) = \sphericalangle(\phi(C)\phi(B)\phi(A)) \text{ und } \sphericalangle(BAC) = \sphericalangle(\phi(B)\phi(A)\phi(C)).$$

Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle \phi(A)\phi(B)\phi(C)$ sind folglich zueinander ähnlich.

Sei nun $x \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}$. Da in ähnlichen Dreiecken die Seitenverhältnisse erhalten bleiben, folgt daraus:

$$x \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\phi(A)\phi(C)} \text{ und } x \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{\phi(C)\phi(B)}.$$

Das heißt: Jede gerichtete Strecke der Ebene $\mathbb{E}$ wird durch die Homothetie ϕ um das x -fache gestreckt. Q.E.D.

Korollar 2.24. *Homothetische Abbildungen erhalten Längenverhältnisse und Winkelmaße.*

Bemerkung 2.25. *Eine Homothetie $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ kann nicht den Streckfaktor 0 haben, da in diesem Fall alle Punkte der Ebene $\mathbb{E}$ auf den Fixpunkt von ϕ abgebildet würden. Dies würde einen Widerspruch zur Definition der Homothetie bedeuten (vgl. Definition 2.4 auf Seite 5).*

Lemma 2.26. *Sei x der Streckfaktor einer Homothetie $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $\phi \neq id$. Genau dann, wenn $x = 1$ ist, sind die invarianten Geraden von ϕ alle parallel zueinander.*

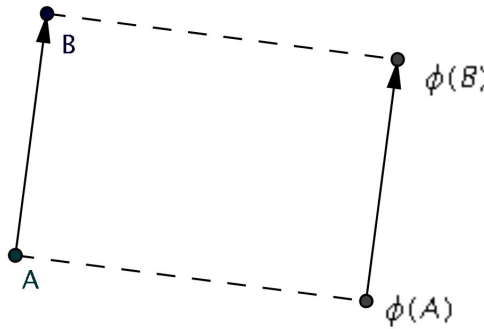


Abbildung 2.4: Skizze zu Lemma 2.26

Beweis. (i) Da $x = 1$ ist, gilt für alle Punkte A, B der Ebene $\mathbb{E}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}$. Da diese beiden gerichteten Strecken gleich sind, spannen die Punkte $A, B, \phi(A), \phi(B)$

ein Parallelogramm auf. Deswegen gilt: $\overrightarrow{A\phi(A)} = \overrightarrow{B\phi(B)}$. Und somit folgt, dass die Geraden $A\phi(A)$ und $B\phi(B)$ parallel zueinander sind. (vgl. Abbildung 2.4). Und da $\phi(A)A$ parallel zu $\phi(B)B$ ist, folgt nach Korollar 2.14, dass alle invarianten Geraden bezüglich ϕ parallel zueinander sind.

- (ii) Seien $A, B, \phi(A)$ gegeben und alle invarianten Geraden von ϕ parallel zueinander. Dann ist $\phi(B)$ der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch den Punkt $\phi(A)$ mit der Parallelen zu $A\phi(A)$ durch den Punkt B . Folglich spannen die Punkte $A, B, \phi(A), \phi(B)$ ein Parallelogramm auf. Und somit gilt, dass $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}$ und $x = 1$ ist.

Q.E.D.

Korollar 2.27. *Hat eine Homothetie $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, mit $\phi \neq id$, den Streckfaktor $x = 1$ und sind die Punkte $A \in \mathbb{E}$ und $\phi(A)$ gegeben, dann wird jeder Punkt der Ebene um die gerichtete Strecke $\overrightarrow{A\phi(A)}$ verschoben.*

Lemma 2.28. *Hat eine Homothetie den Streckfaktor 1 und einen Fixpunkt, dann gilt: $\phi = id$.*

Beweis. Sei $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie mit dem Streckfaktor 1 und dem Fixpunkt F . Dann gilt für alle Punkte A der Ebene $\mathbb{E}$: $\overrightarrow{FA} = 1 \cdot \overrightarrow{\phi(F)\phi(A)}$. Da $\phi(F) = F$ ist, folgt sofort: $\phi(A) = A$. Da jeder Punkt der Ebene auf sich abgebildet wird, ist ϕ die Identität. *Q.E.D.*

Korollar 2.29. *Eine Homothetie hat einen Fixpunkt, wenn ihr Streckfaktor ungleich 1 ist, da in diesem Fall die invarianten Geraden der Homothetie nicht parallel zueinander sind und sich folglich nach Korollar 2.13 in einem Punkt schneiden..*

Definition 2.30. *Ein Maßstab χ auf einer Geraden g ordnet jedem Punkt $P \in g$ einen Wert $a \in \mathbb{R}$ zu. Der Maßstab χ ist dabei auf g linear. Das heißt, für jeweils drei verschiedene Punkte $P, T, R \in g$, mit $|TP| = |PR|$, gilt:*

$$\chi(P) - \chi(T) = \chi(R) - \chi(P).$$

Bemerkung 2.31. *Es sei nun $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie mit dem Fixpunkt F und dem Streckfaktor x . Weiter sei g eine invariante Gerade bezüglich ϕ und χ ein Maßstab auf g , so dass $\chi(F) = 0$ ist. Dann gilt nach Lemma 2.23 für jeden Punkt $P \in g$:*

$$\chi(P) \cdot x = \chi(\phi(P)).$$

Wenn der Streckfaktor x kleiner als 0 ist, heißt das, dass $\phi(P)$ von P aus gesehen hinter F liegt. [Coxeter, 1981, S. 95].

Eine Homothetie mit dem Fixpunkt F und dem Streckfaktor $y < 0$ kann folglich auch als Homothetie mit dem Fixpunkt F , dem Streckfaktor $|y|$ und einer anschließenden Punktspiegelung an F dargestellt werden.

Beispiel 2.32. Es sei $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie mit dem Streckfaktor 2 und dem Fixpunkt F . Und es sei $\psi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie mit dem Streckfaktor -2 und dem Fixpunkt F . Weiter sei A ein beliebiger Punkt der Ebene $\mathbb{E}$ und χ ein Maßstab auf AF , sodass $\chi(F) = 0$ und $\chi(A) = 1$ ist. Werden nun die Bildpunkte $\phi(A)$ und $\psi(A)$ konstruiert, so liegen $\psi(A)$ und $\phi(A)$ sich im gleichen Abstand zu F gegenüber, wobei $\chi(\psi(A)) = -2$ und $\chi(\phi(A)) = 2$ ist (vgl. Abbildung 2.5).

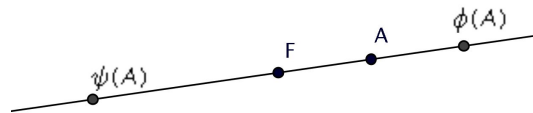


Abbildung 2.5: Homothetien mit negativen und positiven Streckfaktoren

Korollar 2.33. Eine Homothetie $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ mit einem negativen Streckfaktor kehrt die Orientierung jeder gerichteten Strecke $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{E}$ um.

Satz 2.34. Wie bislang gezeigt worden ist, gibt es zwei verschiedene Typen von Homothetien:

1. Homothetien, deren invariante Geraden alle parallel zueinander verlaufen. Diese Homothetien haben den Streckfaktor 1. Sie sind eindeutig definiert, wenn ein Punkt und sein Bildpunkt gegeben sind. Eine Homothetie $\psi \neq id$ mit dem Streckfaktor $y = 1$, die einen Punkt A der Ebene $\mathbb{E}$ auf den Bildpunkt $\psi(A)$ abbildet, wird im Folgenden notiert als: $\psi_{\overrightarrow{(A\psi(A))}}$. Dieser Abbildungstyp der Homothetie heißt Translation.
2. Homothetien, die einen Fixpunkt haben. Sie sind eindeutig definiert, wenn zwei Punkte und ihre Bildpunkte gegeben sind. Eine Homothetie ϕ mit dem Fixpunkt F und dem Streckfaktor x , wird im Folgenden notiert als: $\phi_{(F,x)}$. Dieser Abbildungstyp der Homothetie heißt Dilatation.

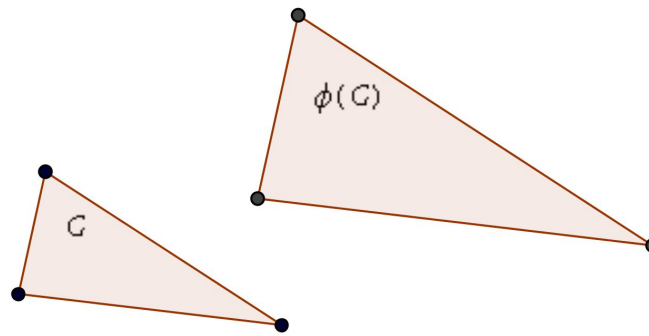


Abbildung 2.6: Beispiel zweier zueinander homothetischer Dreiecke

Beispiel 2.35. Es sei G ein Dreieck in einer Ebene und $\psi \neq \text{id}$ eine Homothetie dieser Ebene auf sich. Dann ist die Abbildung $\psi(G)$ ähnlich zu G und hat die selbe Orientierung wie G . (vgl. Abbildung 2.6). Da in diesem Beispiel der Flächeninhalt von G kleiner ist als der Flächeninhalt von $\psi(G)$, ist ψ eine Dilatation.

2.5 Affinität und Bijektivität von Homothetien

Definition 2.36. Eine Abbildung heißt affin, wenn das Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist, das Bild zweier zueinander parallelen Geraden wieder zwei parallele Geraden sind und Teilverhältnisse auf jeder Geraden erhalten bleiben.

Bemerkung 2.37. Eine Homothetie ist eine affine Abbildung.

Beweis. Aus der Definition der Homothetie folgt sofort, dass Geradengetreue und Parallelitätsgetreue gegeben sind. Und nach Korollar 2.24 gilt, dass Teilverhältnisse durch Homothetien insgesamt und somit auch auf Geraden erhalten bleiben. Somit sind Homothetien affine Abbildungen. Q.E.D.

Definition 2.38. Seien X und Y zwei Mengen. Eine Abbildung $\lambda : X \rightarrow Y$ heißt bijektiv, wenn

- (i) für je zwei Elemente x_1, x_2 aus X gilt: Sind x_1 und x_2 verschieden, dann sind auch die Bildpunkte $\lambda(x_1)$ und $\lambda(x_2)$ voneinander verschieden. Und
- (ii) es für alle Elemente y aus Y ein Element x in X gibt, sodass der Bildpunkt $\lambda(x)$ gleich y ist.

Lemma 2.39. *Homothetien sind bijektive Abbildungen.*

Beweis.

- zu (i) Seien $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie, A, B, C paarweise verschiedene Punkte der Ebene $\mathbb{E}$ und die Bildpunkte $\phi(A), \phi(B)$ gegeben. Wir nehmen an, dass $\phi(C) = \phi(B)$ ist. Dann liegt C auf der Geraden $B\phi(B)$, da $B\phi(B)$ invariant ist und $\phi(C)$ auf dieser Geraden liegt. Zudem muss die Gerade AC parallel zur Geraden $\phi(A)\phi(C)$ verlaufen. Daraus folgt, dass $C = B$ ist, was zum Widerspruch der Annahme, A, B, C seien verschieden, führt. Somit gilt, dass je zwei verschiedene Punkte zwei verschiedene Bildpunkte haben.
- zu (ii) Da die Abbildung einer Ebene auf sich nach der Definition 2.1 eindeutig ist, folgt sofort, dass jedem Bildpunkt ein Ursprungspunkt zugeordnet ist. Sei nun $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie und $A, B \in \mathbb{E}$ und $\phi(A), \phi(B)$ gegeben, dann gilt für jeden Punkt $\phi(C)$, dass C der Schnittpunkt der Parallelen zu $\phi(A)\phi(C)$ durch A und der Parallelen zu $\phi(B)\phi(C)$ durch B ist. Das heißt, zu jedem Bildpunkt kann der Ursprungspunkt bestimmt werden.

Da (i) und (ii) erfüllt sind, gilt nach Definition 2.38, dass Homothetien bijektive Abbildungen sind. *Q.E.D.*

2.6 Verknüpfungen von Homothetien

Definition 2.40. *Die Nacheinanderausführung von zwei Homothetien $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ und $\psi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ heißt Verknüpfung oder auch Kompositum. Im Folgenden wird das Kompositum von ϕ und ψ als $\phi \circ \psi$ notiert. Dabei gilt für jeden Punkt A der Ebene $\mathbb{E}$:*

$$\phi \circ \psi(A) = \phi(\psi(A)).$$

Satz 2.41. *Sei $\phi_n \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1$ die Verknüpfung von n Homothetien der Ebene $\mathbb{E}$ auf sich. Die Verknüpfung $\phi_n \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1$ ist wieder eine Homothetie $\lambda : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$.*

Beweis durch vollständige Induktion.

IA: Die Homothetie ϕ_1 ist per Definition eine Homothetie.

IV: Die Verknüpfung $\phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1 = \psi$ ist eine Homothetie.

IS: Für alle Punkte A, B der Ebene $\mathbb{E}$ gilt: Die Gerade AB ist parallel zur Geraden $\psi(A)\psi(B)$ und $\psi(A)\psi(B)$ ist parallel zur Geraden $\phi_n(\psi(A))\phi_n(\psi(B))$. Folglich ist AB parallel zu $\phi_n(\psi(A))\phi_n(\psi(B))$. Und somit ist $\phi_n \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1 = \lambda$ eine Homothetie.

Q.E.D.

Bemerkung 2.42. Die Verknüpfung von Homothetien ist nicht kommutativ.

Beweis durch ein Gegenbeispiel. Seien $\phi_{(P,-1)}$ und $\psi_{(S,-1)}$ zwei Homothetien und χ ein Maßstab auf PS , so dass $\chi(P) = 0$ und $\chi(S) = 2$ ist. Weiter sei A ein Punkt auf PS , so dass $\chi(A) = 1$ ist. Dann ist $\chi(\phi \circ \psi(A)) = (-3)$ und $\chi(\psi \circ \phi(A)) = (5)$. Da $\phi \circ \psi \neq \psi \circ \phi$, sind Verknüpfungen von Homothetien nicht kommutativ.

Q.E.D.

Bemerkung 2.43. Die Verknüpfung von Abbildungen ist assoziativ. Und da Homothetien Abbildungen sind, sind die Verknüpfungen von Homothetien assoziativ

Beweis. Seien α, β, γ Abbildungen. Dann ist $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = \alpha \circ \phi = \lambda$. Und daraus folgt, dass $\lambda = \alpha \circ \beta \circ \gamma$ ist. Äquivalent ist $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \psi \circ \gamma = \delta$. Daraus folgt, dass $\delta = \alpha \circ \beta \circ \gamma$ ist. Da $\delta = \lambda$ ist, ist gezeigt, dass Abbildungen assoziativ sind.

Q.E.D.

Satz 2.44. Sei $\phi_n \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1 = \psi$ die Verknüpfung von n Homothetien der Ebene $\mathbb{E}$ auf sich. Dann kann ψ eindeutig bestimmt werden.

Um die Verknüpfung $\phi_n \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1 = \psi$ eindeutig zu bestimmen, müssen zunächst $\psi(A)$ und $\psi(B)$ für zwei beliebige, verschiedene Punkte $A, B \in \mathbb{E}$ konstruiert werden. Da nun zwei Punkte und ihre Bildpunkte von ψ gegeben sind, ist ψ eindeutig festgelegt. Jetzt kann jeder weitere Punkte der Ebene $\mathbb{E}$, wie in Lemma 2.16 beschrieben worden ist, konstruiert werden.

Beispiel 2.45. Seien $\phi_{(F_2,x)}$ und $\psi_{(F_1,y)}$ zwei Homothetien, A und B zwei Punkte der Ebene und die Homothetie λ die Verknüpfung $\phi \circ \psi$. Dann ist der Fixpunkt F_3 von λ der Schnittpunkt von $\phi(\psi(A))A$ und $\phi(\psi(B))B$. (vgl. Abbildung 2.7).

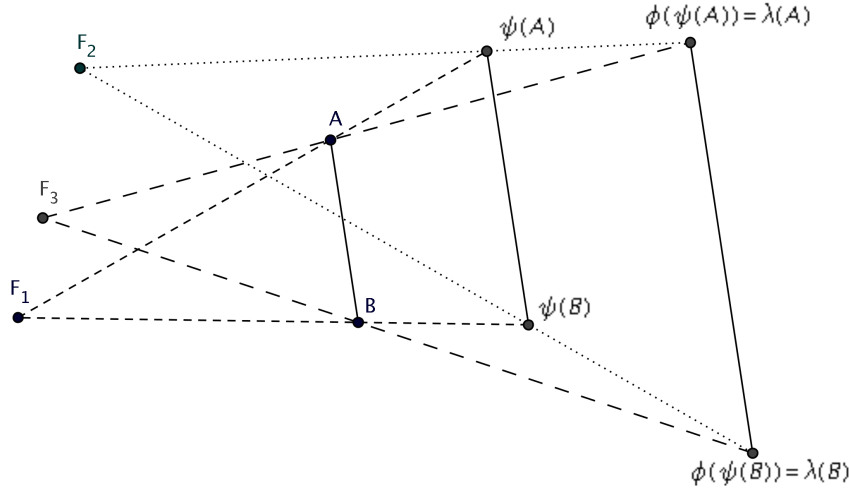
Der Streckfaktor von λ ist $\frac{\overrightarrow{F\lambda(A)}}{\overrightarrow{FA}}$.

Lemma 2.46. Haben zwei Homothetien ϕ und ψ denselben Fixpunkt F , so hat die Verknüpfung $\phi \circ \psi = \lambda$ ebenfalls den Fixpunkt F .

Beweis. Da $\phi(F) = F$ und $\psi(F) = F$ ist, folgt: $\lambda(F) = F$.

Q.E.D.

Lemma 2.47. Sei ϕ eine Homothetie mit dem Streckfaktor x und sei ψ eine Homothetie mit dem Streckfaktor y . Dann gilt: Die Verknüpfung $\psi \circ \phi = \lambda$ hat den Streckfaktor $x \cdot y$.

Abbildung 2.7: Konstruktion des Fixpunktes von $\phi \circ \psi$

Beweis.

$$x \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} \quad (2.1)$$

$$y \cdot \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} = \overrightarrow{\psi(\phi(A))\psi(\phi(B))} \quad (2.2)$$

Aus (2.1) und (2.2) folgt: $x \cdot y \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\psi(\phi(A))\psi(\phi(B))}$. Q.E.D.

Lemma 2.48. *Es seien $\phi_{(F_1,x)}$ und $\psi_{(F_2,y)}$ zwei Homothetien der Ebene $\mathbb{E}$ auf sich und die Verknüpfung $\psi \circ \phi$ die Homothetie λ . Wenn $x \neq y$, $x \neq 1$, $y \neq 1$ sind, F_1 und F_2 zwei verschiedene Punkte sind und $x \cdot y = 1$ ist, dann folgt:*

- (i) *Alle invarianten von λ sind parallel zueinander.*
- (ii) *Die gerichtete Strecke, um die jeder Punkt von $\mathbb{E}$ durch λ verschoben wird, ist parallel zu F_1F_2 .*
- (iii) *Die gerichtete Strecke, um die jeder Punkt von $\mathbb{E}$ durch λ verschoben wird, hat die Länge $\frac{x-1}{x} \cdot \overrightarrow{F_1F_2}$.*

Das heißt: $\psi_{(F_2,y)} \circ \phi_{(F_1,x)} = \lambda_{(\frac{x-1}{x} \cdot \overrightarrow{F_1F_2})}$.

Beweis. Seien A und B zwei Punkte der Ebene $\mathbb{E}$.

zu (i) Da λ den Streckfaktor $x \cdot y = 1$ hat, ist λ nach Lemma 2.26 durch eine Translation definiert.

zu (ii) Für F_1 gilt: $\phi(F_1) = F_1$ und $\psi(F_1)$ liegt auf der Geraden F_1F_2 . Das heißt: $\lambda(F_1)$ liegt auf der Geraden F_1F_2 . Folglich ist die gerichtete Strecke, um die jeder Punkt durch λ verschoben wird, parallel zu der Geraden F_1F_2 .

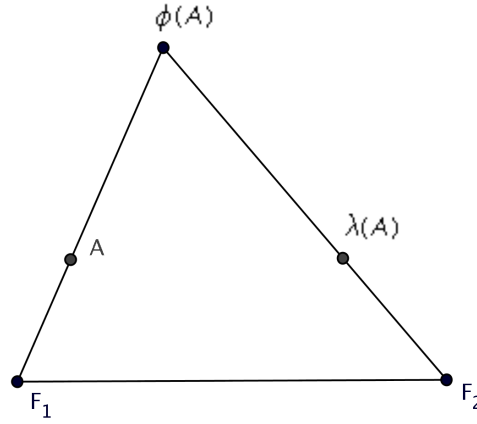


Abbildung 2.8: Beispiel zum Lemma 2.48

zu (iii) Da y der Streckfaktor von ψ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_1F_2} \cdot y &= \overrightarrow{\lambda(F_1)F_2}. \\ \Rightarrow \overrightarrow{F_1F_2} \cdot y &= \overrightarrow{F_1F_2} - \overrightarrow{F_1\lambda(F_1)}. \\ \Rightarrow y &= \frac{\overrightarrow{F_1F_2} - \overrightarrow{F_1\lambda(F_1)}}{\overrightarrow{F_1F_2}}. \\ \Rightarrow \frac{\overrightarrow{F_1\lambda(F_1)}}{\overrightarrow{F_1F_2}} &= 1 - y. \end{aligned}$$

Da $y = \frac{1}{x}$ ist, folgt:

$$\frac{\overrightarrow{F_1\lambda(F_1)}}{\overrightarrow{F_1F_2}} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Somit ist gezeigt, dass für alle Punkte A der Ebene $\mathbb{E}$ gilt:

$$\overrightarrow{A\lambda(A)} = \overrightarrow{F_1F_2} \cdot \frac{x-1}{x}. \text{ (vgl. Abbildung 2.8).}$$

Q.E.D.

Beispiel 2.49. Seien $\phi_{(F_1, -1)}$ und $\psi_{(F_2, -1)}$ zwei Homothetien der Ebene $\mathbb{E}$ auf sich. Dann ist $\psi \circ \phi = \lambda_{(\overrightarrow{2 \cdot F_1F_2})}$ (vgl. Abbildung 2.9). Hier wird das Dreieck $\triangle CDE$ durch ϕ auf das

Dreieck $\triangle C'D'E'$ und das Dreieck $\triangle C''D''E''$ durch ψ auf das Dreieck $\triangle C''D''E''$ abgebildet. Die Abbildung verdeutlicht, dass die invarianten Geraden von λ parallel zueinander sind und $\overrightarrow{F_1F_2} \cdot 2 = \overrightarrow{CC''}$ ist.).

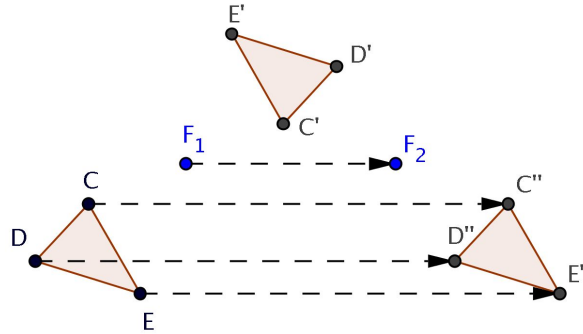


Abbildung 2.9: Verknüpfung zweier Homothetien, die eine Verschiebung ergeben

Satz 2.50. Wenn zwei Homothetien, die die Ebene $\mathbb{E}$ auf sich abbilden, durch $\phi_{(F_1,x)}$ und $\psi_{(F_2,y)}$ mit $x \cdot y \neq 1$ gegeben sind, dann gilt für den Fixpunkt F_3 für $\psi \circ \phi = \lambda_{(F_3,u)}$:

(i) F_3 liegt auf der Geraden F_1F_2 .

(ii) $\overrightarrow{F_1F_3} = \frac{y-1}{xy-1} \overrightarrow{F_1F_2}$. [Schupp, 1974, S. 38.]

Beweis.

zu (i) Es sei A ein Punkt auf der Geraden F_1F_2 . Da F_1F_2 eine invariante Gerade von ϕ ist, liegt $\phi(A)$ auf F_1F_2 . Und da F_1F_2 ebenfalls eine invariante von ψ ist, liegt $\psi(A)$ auf F_1F_2 . Daraus folgt, dass jeder Punkt $\psi(\phi(A))$ auf der Geraden F_1F_2 liegt und diese Gerade somit bezüglich λ invariant ist. Und daraus folgt wiederum, dass der Fixpunkt von λ auf der Geraden F_1F_2 liegen muss.

zu (ii) Hier bedarf es folgender Vorüberlegungen: $\lambda(F_3) = F_3$. Das heißt, es gibt einen Punkt Q für den gilt: $\phi(F_3) = Q$, sodass $x \cdot \overrightarrow{F_1F_3} = \overrightarrow{F_1Q}$ und $\psi(Q) = F_3$, sodass $y \cdot \overrightarrow{F_2Q} = \overrightarrow{F_2F_3}$. (vgl. Abbildung 2.10). Dann gilt:

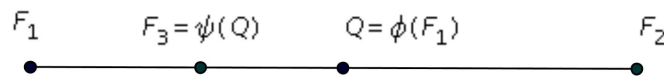


Abbildung 2.10: Skizze zu Satz 2.50

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_1 F_3} &= \frac{1}{x} \overrightarrow{F_1 Q} = \frac{1}{x} (\overrightarrow{F_1 F_2} + \frac{1}{y} \overrightarrow{F_2 F_3}) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{x} (\overrightarrow{F_1 F_2} + \frac{1}{y} (\overrightarrow{F_1 F_3} - \overrightarrow{F_1 F_2})) &= \frac{1}{x} \left(\overrightarrow{F_1 F_2} + \frac{\overrightarrow{F_1 F_3}}{y} - \frac{\overrightarrow{F_1 F_2}}{y} \right) \\
\overrightarrow{F_1 F_3} &= \frac{\overrightarrow{F_1 F_2}}{x} + \frac{\overrightarrow{F_1 F_3}}{xy} - \frac{\overrightarrow{F_1 F_2}}{xy} \\
\overrightarrow{F_1 F_3} - \frac{\overrightarrow{F_1 F_3}}{xy} &= \frac{\overrightarrow{F_1 F_2}}{x} - \frac{\overrightarrow{F_1 F_2}}{xy} \\
\frac{xy \cdot \overrightarrow{F_1 F_3} - \overrightarrow{F_1 F_3}}{xy} &= \frac{y \cdot \overrightarrow{F_1 F_2} - \overrightarrow{F_1 F_2}}{xy} \\
xy \cdot \overrightarrow{F_1 F_3} - \overrightarrow{F_1 F_3} &= y \cdot \overrightarrow{F_1 F_2} - \overrightarrow{F_1 F_2} \\
(xy - 1) \cdot \overrightarrow{F_1 F_3} &= (y - 1) \cdot \overrightarrow{F_1 F_2} \\
\overrightarrow{F_1 F_3} &= \frac{y - 1}{xy - 1} \cdot \overrightarrow{F_1 F_2}.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Beispiel 2.51. Seien $\phi_{(F_1,2)}$ und $\psi_{(F_2,3)}$ zwei Homothetien und χ ein Maßstab auf $F_1 F_2$, so dass $\chi(F_1) = 0$ und $\chi(F_2) = 5$ ist. Weiter sei $\psi \circ \phi = \lambda_{(F_3,u)}$. Dann ist $\overrightarrow{F_1 F_3} = \frac{3-1}{2 \cdot 3 - 1} \overrightarrow{F_1 F_2}$. Daraus folgt, dass $\chi(F_3) = 2$ ist und $u = 2 \cdot 3 = 6$ ist. Die Verknüpfung von ϕ und ψ ist folglich eine Homothetie mit dem Streckfaktor 6 und dem Fixpunkt F_3 , für den gilt: $\chi(F_3) = 2$.

2.7 Inverse Homothetien

Lemma 2.52. Da homothetische Abbildungen bijektiv sind, ist jede Homothetie invertierbar. Das heißt, es gibt für jede Homothetie ϕ eine inverse Homothetie ϕ^{-1} , sodass gilt:

$$\phi^{-1} \circ \phi = id.$$

- (i) Die inverse Homothetie von $\phi_{(F,x)}$ ist $\lambda_{(F, \frac{1}{x})}$.
- (ii) Die inverse Homothetie von $\psi_{\overrightarrow{AB}}$ ist $\vartheta_{\overrightarrow{BA}}$.
- (iii) Die inverse Homothetie von $\phi \circ \psi$ ist $\psi^{-1} \circ \phi^{-1}$.

Beweis. zu (i) Sei $\phi_{(F,x)}$ eine Homothetie. Für alle Punkte P der Ebene gilt: $x \cdot \overrightarrow{FP} = \overrightarrow{F\phi(P)}$. Wenn nun eine Homothetie durch $\lambda_{(F,\frac{1}{x})}$ gegeben ist, dann folgt für $\lambda \circ \phi$:

$$\lambda(\overrightarrow{F\phi(P)}) = \frac{1}{x} \cdot \overrightarrow{F\phi(P)} = \overrightarrow{FP} \Rightarrow \lambda(\phi(P)) = P. \Rightarrow \phi \circ \lambda = id. \Rightarrow \lambda = \phi^{-1}.$$

zu (ii) Seien zwei Homothetien gegeben durch $\psi_{\overrightarrow{AB}}$ und $\vartheta_{\overrightarrow{BA}}$. Für alle Translationen gilt: $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BA} = id$. Daraus folgt für alle Punkte P der Ebene:

$$\psi(\vartheta(P)) = P. \Rightarrow \psi \circ \vartheta = id. \Rightarrow \vartheta = \psi^{-1}.$$

zu (iii) Seien T, P und Q Punkte der Ebene, so dass $\phi(T) = P$ und $\psi(P) = Q$ ist. Dann gilt: $\psi^{-1}(Q) = P$ und $\phi^{-1}(P) = T$. Daraus folgt: $\phi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \phi^{-1} = id$.

Q.E.D.

Bemerkung 2.53. *Trivialerweise gilt für jede Homothetie ϕ :*

$$\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi.$$

Deswegen muss nicht zwischen links- und rechtsinvers unterschieden werden.

2.8 Eindeutigkeit von Homothetien

Notation 2.54. *Eine Strecke mit den Endpunkten A und B wird im Folgenden notiert als $\overline{AB}$.*

Lemma 2.55. *Um einen Punkt A der Ebene $\mathbb{E}$ durch eine Homothetie $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ auf einen anderen Punkt $A' \in \mathbb{E}$ abzubilden, gibt es unendlich viele Möglichkeiten.*

Beweis. Entweder ist die Homothetie durch $\phi_{(F,x)}$ definiert. Dann muss der Fixpunkt F auf der Geraden AA' liegen und der Streckfaktor $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{A'F}}$ sein. Oder die Homothetie ist durch $\phi_{(\overrightarrow{AA'})}$ definiert. Q.E.D.

Lemma 2.56. *Sind zwei Strecken $\overline{AB} \neq \overline{CD}$ parallel zueinander, so gibt es stets genau zwei Homothetien, die $\overline{AB}$ auf $\overline{CD}$ abbilden.*

Beweis. Da jeweils die Endpunkte der Strecke $\overline{AB}$ auf die Endpunkte der Strecke $\overline{CD}$ abgebildet werden müssen, gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten, $\overline{AB}$ auf $\overline{CD}$ abzubilden:

$$1. \phi(A) = C \text{ und } \phi(B) = D$$

oder

$$2. \psi(A) = D \text{ und } \psi(B) = C.$$

Q.E.D.

Satz 2.57. Seien $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ zwei Dreiecke, für die gilt: AB ist parallel zu DE , BC ist parallel zu EF und CA ist parallel zu FA . Dann gibt es stets genau eine Homothetie δ , die $\triangle ABC$ auf $\triangle DEF$ abbildet.

Beweis. Seien $\delta(A) = D$ und $\delta(B) = E$. Dann gilt nach Lemma 2.16, dass $\delta(C)$ der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch D mit der Parallelen zu BC durch E ist. Folglich ist $\delta(C) = F$. *Q.E.D.*

Satz 2.58. Es seien P und T zwei regelmäßige n -Ecke mit einer geraden Anzahl an Ecken und die Strecke $\overline{AB} \in P$ parallel zur Strecke $\overline{A'B'} \in T$. Dann gibt es stets genau zwei Homothetien, die P auf T abbilden.

Beweis. Da in regelmäßigen n -Ecken mit einer geraden Anzahl an Ecken jede Strecke parallel zu der gegenüberliegenden Strecke ist, sind zu jeder Strecke $\overline{AB} \in P$ zwei Strecken $\overline{A'B'}$ und $\overline{C'D'}$ in T parallel. Dementsprechend kann $\overline{AB}$ entweder auf $\overline{A'B'}$ oder auf $\overline{C'D'}$ abgebildet werden. Insbesondere gilt hier: $x \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ und $-x \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'D'}$. *Q.E.D.*

Beispiel 2.59. Wenn bei zwei Quadraten $ABCD$ und $A'B'C'D'$ die Strecke AB parallel zur Strecke $A'B'$ ist, dann ist AB auch parallel zur Strecke $C'D'$. Die Abbildung 2.11 zeigt ein Beispiel, in dem der Flächeninhalt von $ABCD$ kleiner als der Flächeninhalt von $A'B'C'D'$ ist. Hier gibt es zwei Homothetien, die $ABCD$ auf $A'B'C'D'$ abbilden. Zum einen $\phi_{(E,2)}$ und zum anderen $\psi_{(F,-2)}$.

Wenn die Flächeninhalte von $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gleich groß sind, gibt es ebenfalls zwei Homothetien: $\lambda_{(\overrightarrow{AA'})}$ und $\vartheta_{(M,-1)}$. M ist dann der Mittelpunkt der Strecke AD' .

Notation 2.60. Ein Kreis K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r wird im Folgenden notiert als $K(M, r)$.

Satz 2.61. Zu zwei Kreisen $K_1 \neq K_2$ gibt es stets genau zwei Homothetien, die K_1 auf K_2 abbilden.

Beweis. Seien zwei Kreise K_1 und K_2 definiert durch $K_1(M_1, r_1)$ und $K_2(M_2, r_2)$. Wenn $\phi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Homothetie und $\phi(K_1) = K_2$ ist, dann ist $\phi(M_1) = M_2$. Seien die Strecke

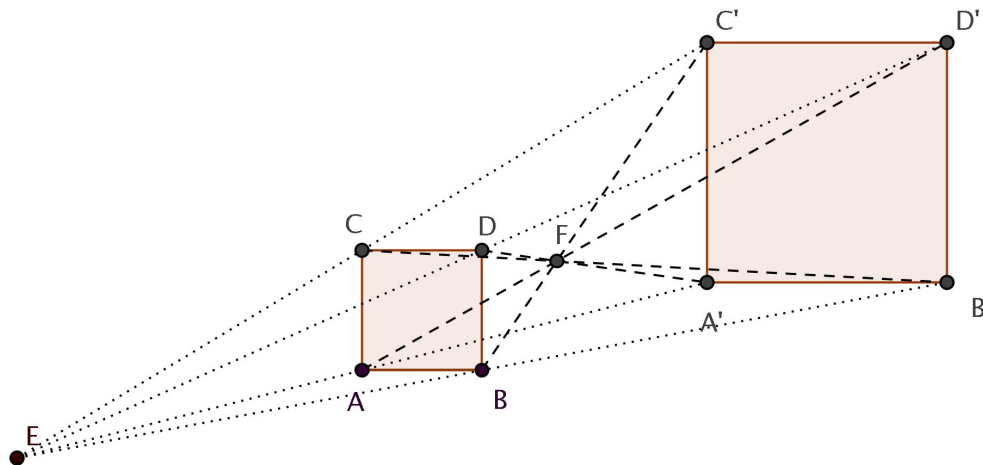


Abbildung 2.11: Homothetien zwischen n-Ecken

$\overline{X_1X_2}$ eine Mittelpunktssehne des Kreises K_1 und die Strecke $\overline{Y_1Y_2}$ eine Mittelpunktssehne des Kreises K_2 , wobei X_1X_2 parallel zu Y_1Y_2 ist (vgl. Abbildung 2.12). Dann gibt es nach Lemma 2.56 stets genau zwei Möglichkeiten, $\overline{X_1X_2}$ auf $\overline{Y_1Y_2}$ durch Homothetien abzubilden.

Da jede Mittelpunktssehne von K_1 auf eine Mittelpunktssehne von K_2 abgebildet wird, gibt es stets genau zwei Möglichkeiten K_1 auf K_2 abzubilden.

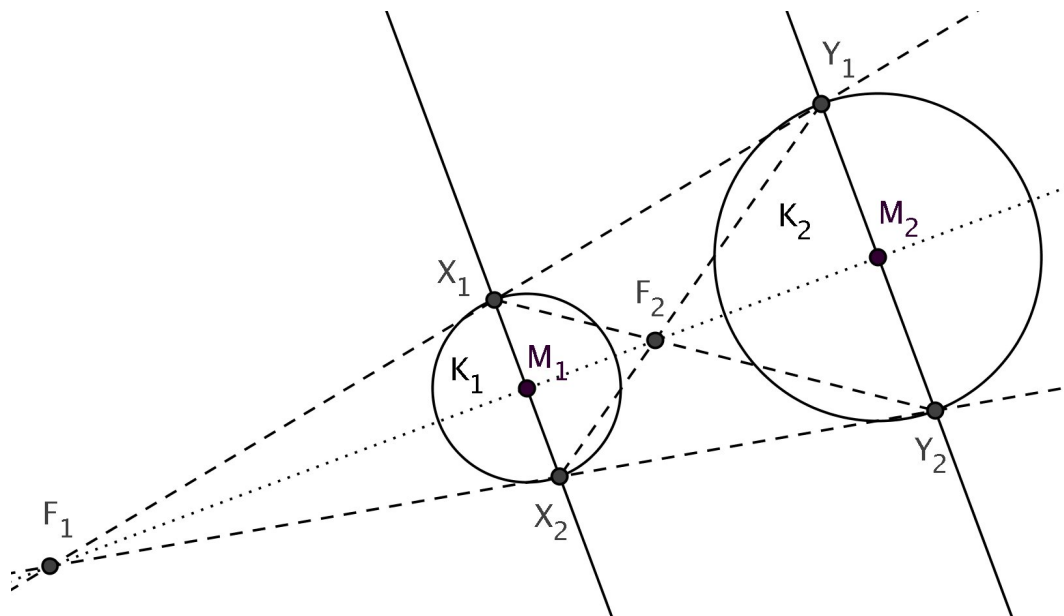


Abbildung 2.12: Homothetien zwischen Kreisen

Hier ist zwischen vier verschiedenen Fällen zu unterscheiden:

Fall 1: $r_1 \neq r_2$ und $M_1 \neq M_2$:

1. Möglichkeit: $\phi(X_1) = Y_1$ und $\phi(X_2) = Y_2$. Das heißt, die Homothetie ist definiert durch $\phi_{(F_1, x)}$, wobei $F_1 = X_1Y_1 \cap X_2Y_2$ und $x = \frac{\overrightarrow{F_1Y_1}}{\overrightarrow{F_1X_1}}$ ist.
2. Möglichkeit: $\phi(X_1) = Y_2$ und $\phi(X_2) = Y_1$. Das heißt, die Homothetie ist definiert durch $\phi_{(F_2, x)}$, wobei $F_2 = X_1Y_2 \cap X_2Y_1$ und $x = \frac{\overrightarrow{F_2Y_2}}{\overrightarrow{F_2X_1}}$ ist.

In diesem Fall gilt: $\frac{\overrightarrow{F_1Y_1}}{\overrightarrow{F_1X_1}} = \frac{\overrightarrow{F_2Y_2}}{\overrightarrow{F_2X_1}} = \frac{r_2}{r_1} = x$. (vgl. Abbildung 2.12.)

Fall 2: $r_1 = r_2$ und $M_1 \neq M_2$

1. Möglichkeit: $\phi(X_1) = Y_1$ und $\phi(X_2) = Y_2$. Das heißt, die Homothetie ist definiert durch $\phi_{(\overrightarrow{X_1Y_1})}$
2. Möglichkeit: $\phi(X_1) = Y_2$ und $\phi(X_2) = Y_1$. Das heißt, die Homothetie ist definiert durch $\phi_{(F_2, x)}$, wobei $F_2 = X_1Y_2 \cap X_2Y_1$ und $x = \frac{\overrightarrow{F_2Y_2}}{\overrightarrow{F_2X_1}} = -1$ ist.

Fall 3: $r_1 \neq r_2$ und $M_1 = M_2$

Für diesen Fall gilt dasselbe wie für Fall 1, außer dass $F_1 = F_2 = M_{1,2}$ ist.

Fall 4: $r_1 = r_2$ und $M_1 = M_2$. Daraus folgt, dass K_1 gleich K_2 und ϕ somit die Identität ist. Q.E.D.

2.9 Gruppeneigenschaften von Homothetien

Definition 2.62. Sei $\mathbb{G}$ eine Menge und $\circ$ eine Verknüpfung. Dann heißt $(\mathbb{G}, \circ)$ eine Gruppe, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Für je zwei Elemente x, y aus $\mathbb{G}$ gibt es ein z aus $\mathbb{G}$, sodass $x \circ y = z$. $(\mathbb{G}, \circ)$ heißt dann bezüglich $\circ$ abgeschlossen.
2. Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ. Das heißt, dass für alle Elemente x, y und z aus $\mathbb{G}$ gilt: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
3. $(\mathbb{G}, \circ)$ enthält ein neutrales Element. Das heißt, es gibt ein Element $e \in \mathbb{G}$, sodass für alle $x \in \mathbb{G}$ gilt: $e \circ x = x$.
4. Für alle Elemente $x \in \mathbb{G}$ gibt es ein inverses Element $x^{-1} \in \mathbb{G}$, sodass die Verknüpfung $x \circ x^{-1} = e$ ist.

Satz 2.63. Sei $\mathbb{H}$ die Menge aller Homothetien. Dann ist $(\mathbb{H}, \circ)$ eine Gruppe.

Beweis. 1. $(\mathbb{H}, \circ)$ ist abgeschlossen, da die Verknüpfung von zwei Homothetien wieder eine Homothetie ist. (vgl. Satz 2.41 auf Seite 14).

2. Die Assoziativität ist bei der Verknüpfung von Homothetien erfüllt (vgl. Bemerkung 2.43 auf Seite 15).
3. Da die Verknüpfung einer Homothetie λ mit der Identität die Homothetie λ ergibt, ist die Identität das neutrale Element in $\mathbb{H}$. Die Identität ist gegeben durch $\phi_{(F,1)}$ oder $\phi_{(\overrightarrow{AA})}$.
4. Zu jedem $\phi \in \mathbb{H}$ gibt es ein inverses Element $\phi^{-1} \in \mathbb{H}$, sodass gilt: $\phi \circ \phi^{-1} = id$ (vgl. Lemma 2.52 auf Seite 19).

Da 1. 2. 3. 4. erfüllt sind, ist $(\mathbb{H}, \circ)$ nach Definition 2.62 eine Gruppe. Q.E.D.

Korollar 2.64. *Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen. Dann ist $(\mathbb{H}, \circ)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{A}, \circ)$.*

Satz 2.65. *Es sei $\mathbb{T}$ die Menge aller Homothetien ohne Fixpunkt. Das heißt: $\mathbb{T}$ ist die Menge aller Translationen. Dann ist $(\mathbb{T}, \circ)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{H}, \circ)$.*

Beweis. 1. Es seien ϕ und ψ zwei Homothetien der Ebene $\mathbb{E}$ auf sich, die keinen Fixpunkt und somit den Streckfaktor 1 haben. Dann gilt für alle Punkte $A, B \in \mathbb{E}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}$ und $\overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} = \overrightarrow{\psi(\phi(A))\psi(\phi(B))}$. Daraus folgt: $\overrightarrow{\psi(\phi(A))\psi(\phi(B))} = \overrightarrow{AB}$. Somit hat $\phi \circ \psi = \lambda$ ebenfalls den Streckfaktor 1 und keinen Fixpunkt. $(\mathbb{T}, \circ)$ ist also abgeschlossen.

2. Die Assoziativität ist für $(\mathbb{T}, \circ)$ erfüllt, da alle Elemente von $\mathbb{T}$ in $\mathbb{H}$ sind und $(\mathbb{H}, \circ)$ assoziativ ist.
3. Das neutrale Element ist in $\mathbb{T}$ enthalten: $\phi_{(\overrightarrow{AA})} = id$.
4. Zu jedem $\phi_{(\overrightarrow{AB})} \in \mathbb{T}$ gibt es ein inverses Element $\phi^{-1} \in \mathbb{T}$, sodass gilt: $\phi \circ \phi^{-1} = id$ (vgl. Lemma 2.52 auf Seite 19).

Da 1. 2. 3. 4. erfüllt sind, ist $(\mathbb{T}, \circ)$ nach Definition 2.62 eine Gruppe. Q.E.D.

Satz 2.66. *Sei $\mathbb{D}$ die Menge aller Homothetien, die einen Fixpunkt haben. Das heißt: $\mathbb{D}$ ist die Menge aller Dilatationen. Dann ist $(\mathbb{D}, \circ)$ keine Untergruppe von $(\mathbb{H}, \circ)$.*

Beweis. Nach Lemma 2.48 gilt:

$$\phi_{(P,x)} \circ \psi_{(T,y)} = \vartheta_{(\vec{v})} \text{ wenn } x \cdot y = 1 \text{ und } x \neq 1.$$

Und da $\vartheta_{(\vec{v})}$ kein Element von $\mathbb{D}$ ist, ist $(\mathbb{D}, \circ)$ nicht abgeschlossen. Q.E.D.

2.10 Homothetien im Raum

Ein Homothetie kann auch eine Abbildung des Raumes auf sich sein. Hier bleibt die Definition gleich: Geraden werden jeweils auf zu sich parallele Geraden abgebildet. Wird diese Definition zugrundegelegt, bleiben alle Eigenschaften der Homothetie, die für die Ebene gelten, im Raum erhalten.

Ebenso wie in der Ebene kann eine Homothetie im Raum durch eine Translation oder eine Dilatation definiert sein, sodass die Homothetie entweder einen oder keinen Fixpunkt haben kann. Auch bezüglich der Verknüpfung bleiben die Sachverhalte gleich.

Im Raum können jedoch neben Figuren auch Beziehungen zwischen Körpern mittels Homothetien untersucht werden. So gibt es beispielsweise zwischen zwei Kugeln stets genau zwei Homothetien, die eine Kugel auf die andere abbilden.

3 Anwendungen

3.1 Strecke in n gleiche Teile zerlegen

Um eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ in n gleich lange Teile zu zerlegen, wird zunächst eine Parallele g zu AB konstruiert, für die gilt: $AB \neq g$. Anschließend wird ein beliebiger Punkt $P \in g$ bestimmt. Von P aus wird dann n -mal derselbe Abstand auf g abgetragen, sodass die Punkte $P_1, P_2, \dots, P_n$ entstehen. Danach wird der Schnittpunkt H von den Geraden AP und BP_n konstruiert (ebenso kann H auch der Schnittpunkt von AP_n und BP sein). Schließlich werden die Geraden $HP_1, HP_2, \dots, HP_{n-1}$ konstruiert. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Strecke $\overline{AB}$ teilen $\overline{AB}$ in n gleich lange Strecken.

Beweis. Da AB parallel zu g ist, gibt es eine Homothetie ϕ , sodass $AB = \phi(P)\phi(P_n)$. Da der Schnittpunkt von $A\phi(P)$ und $B\phi(P_n)$ der Punkt H ist, ist H der Fixpunkt von ϕ . Da Homothetien Längenverhältnisse erhalten und die Punkte $P, P_1, \dots, P_n$ jeweils den gleichen Abstand zueinander haben, zerlegen die Punkte $\phi(P), \phi(P_1), \dots, \phi(P_n)$ die Strecke AB in n gleich lange Strecken. *Q.E.D.*

Beispiel 3.1. Die Abbildung 3.1 zeigt, wie die Strecke AB nach der oben stehenden Konstruktionsbeschreibung in fünf gleich lange Teile zerlegt wird.

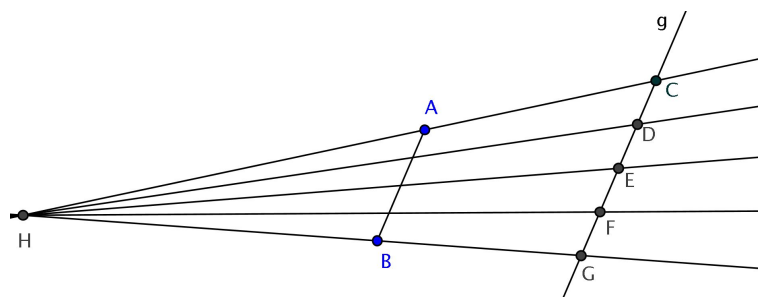


Abbildung 3.1: Zerlegung einer Strecke

3.2 Strecke mit beliebigem Faktor multiplizieren

Damit eine Strecke $\overline{AB}$ mit dem Faktor $\frac{x}{y}$, wobei x und y natürliche Zahlen sind, multipliziert werden kann, sodass gilt: $\overrightarrow{AB} = \frac{x}{y} \overrightarrow{AB'}$, wird zunächst eine Gerade $g \neq AB$ durch A konstruiert. Nun wird auf g eine Skala mit beliebigem Maßstab konstruiert. Dabei hat A den Wert 0. Der Punkt auf g mit dem Wert x sei P_x und der Punkt mit dem Wert y sei P_y .

Jetzt wird zur Geraden $P_y B$ eine Parallele durch den Punkt P_x konstruiert. Diese Parallele schneidet AB im gesuchten Punkt B' .

Beweis. Da $\frac{\overrightarrow{P_x A}}{\overrightarrow{P_y A}} = \frac{x}{y}$ ist und $P_y B$ parallel zu $P_x B'$ ist, folgt daraus, dass es eine Homothetie ϕ mit dem Streckfaktor $\frac{x}{y}$ und dem Fixpunkt A gibt, sodass gilt: $\phi(P_y) = P_x$. Und daraus folgt: $\phi(B) = B'$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \frac{x}{y} = \overrightarrow{AB'}$. Q.E.D.

Äquivalent zu dieser Aufgabe kann eine Strecke $\overline{AB}$ mit dem Faktor $\sqrt{a}$, wobei a eine natürliche Zahl ist, gestreckt werden. Dazu muss jedoch die Länge $\sqrt{x}$ in Abhängigkeit vom gewählten Maßstab konstruiert werden. Um die Länge $\sqrt{2}$ zu erhalten, wird ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert, bei dem die Katheten jeweils eine Längeneinheit betragen. Die Hypotenuse dieses Dreiecks hat dann die Länge $\sqrt{2}$. Dies ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras, nach dem gilt: $1^2 + 1^2 = x^2$, sodass $x = \sqrt{2}$ ist.

Um $\sqrt{3}$ zu erzeugen wird wieder ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert, bei dem nun eine Kathete eine Längeneinheit beträgt und die andere Kathete die Länge $\sqrt{2} = x$ hat. Daraus folgt, dass die Hypotenuse die Länge $\sqrt{3}$ hat. (vgl. Abbildung 3.2.)

Diese Konstruktion kann solange fortgesetzt werden, bis die gewünschte Länge von $\sqrt{a}$ entsteht.

Beispiel 3.2. Die Abbildung 3.2 zeigt, wie eine Strecke $\overline{AB}$ nach der oben stehenden Konstruktionsbeschreibung mit dem Faktor $\sqrt{5}$ gestreckt wird. Hier beträgt $|AP_1| = |GH| = 1$ Längeneinheit und $|\overline{AP_x}| = |\overline{GJ}| = \sqrt{5}$ Längeneinheiten. Daraus folgt: $\overrightarrow{AB'} = \sqrt{5} \cdot \overrightarrow{AB}$.

3.3 Flächeninhalt von Figuren beliebig vergrößern

Notation 3.3. Der Flächeninhalt einer Figur G wird im Folgenden notiert als $|G|$.

Bemerkung 3.4. Es sei $|\Delta ABC|$ der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC und h_{AB} die Höhe auf der Seite AB . Für alle Dreiecke gilt: $|\Delta ABC| = \frac{|\overline{AB}| \cdot |h_{AB}|}{2}$.

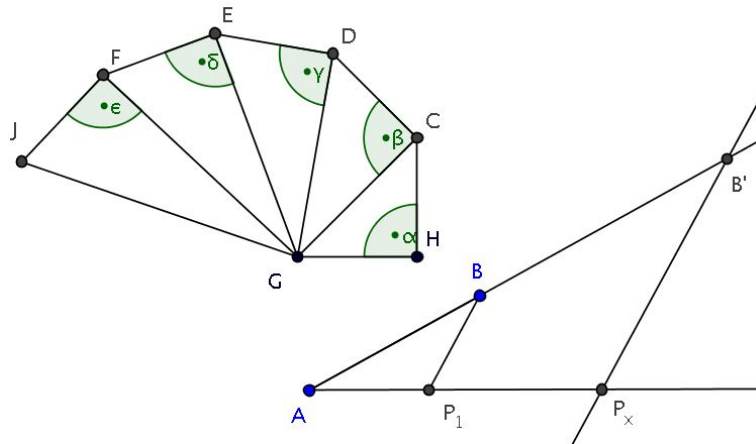


Abbildung 3.2: Multiplizieren einer Strecke mit dem Faktor $\sqrt{5}$

Lemma 3.5. *Wird eine Figur F mit einer Homothetie $\phi_{(P, \sqrt{x})}$ abgebildet, so vergrößert sich der Flächeninhalt von F um das x -fache. Dabei kann der Fixpunkt P von ϕ beliebig gewählt werden.*

Beweis. Jede Figur lässt sich in Dreiecke zerlegen beziehungsweise approximieren. Wird nun ein Dreieck mit dem Faktor $\sqrt{x}$ gestreckt, dann werden $\overline{AB}$ und h_{AB} mit $\sqrt{x}$ gestreckt. Daraus folgt für $\Delta\phi(A)\phi(B)\phi(C)$:

$$|\Delta\phi(A)\phi(B)\phi(C)| = \frac{\sqrt{x} \cdot |h_{AB}| \cdot \sqrt{x} \cdot |\overline{AB}|}{2}$$

$$|\Delta\phi(A)\phi(B)\phi(C)| = x \cdot \frac{|\overline{AB}| \cdot |h_{AB}|}{2}$$

Daraus folgt: $|\Delta ABC| \cdot x = |\Delta \phi(A)\phi(B)\phi(C)|$.

Q.E.D.

Lemma 3.6. *Um das Volumen eines geometrischen Körpers im Raum um den Faktor x zu vergrößern, muss dieser Körper mit der Homothetie $\phi_{(P, \sqrt[3]{x})}$ abgebildet werden. Wieder kann der Fixpunkt frei gewählt werden.*

Der Beweis ist äquivalent zu dem Beweis aus Lemma 3.5.

3.4 Beweis der Strahlensätze durch Homothetie

Lemma 3.7. *Seien g und h zwei Geraden, die parallel zueinander sind, j eine Gerade, die g im Punkt A und h im Punkt A' schneidet, und i eine Gerade, die g im Punkt B ,*

h im Punkt B' und j im Punkt F schneidet. Dann gilt:

$$\frac{|FA|}{|FA'|} = \frac{|FB|}{|FB'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}.$$

Beweis. Da g parallel zu h ist und i und j sich in einem Punkt schneiden, gibt es eine Homothetie ϕ mit dem Fixpunkt F , die A auf A' , B auf B' und somit g auf h abbildet. Nach Lemma 2.23 gilt dann: $\overrightarrow{FA} \cdot x = \overrightarrow{FA'}$, $\overrightarrow{FB} \cdot x = \overrightarrow{FB'}$ und $\overrightarrow{AB} \cdot x = \overrightarrow{A'B'}$. Daraus folgt bereits:

$$\frac{|FA|}{|FA'|} = \frac{|FB|}{|FB'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}.$$

Q.E.D.

Lemma 3.8. Seien j eine Gerade, auf der die Punkte F, A, A' so liegen, dass $\overrightarrow{FA} \cdot x = \overrightarrow{FA'}$ und i eine Gerade, die j im Punkt F schneidet und die Punkte B, B' beinhaltet, sodass gilt: $\overrightarrow{FB} \cdot x = \overrightarrow{FB'}$. Dann ist die Gerade AB parallel zur Geraden $A'B'$.

Beweis. Wenn $\overrightarrow{FB} \cdot x = \overrightarrow{FB'}$ und $\overrightarrow{FA} \cdot x = \overrightarrow{FA'}$ ist, gibt es eine Homothetie ϕ mit dem Fixpunkt F und dem Streckfaktor x , sodass $\phi(A) = A'$ und $\phi(B) = B'$. Und daraus folgt, dass AB parallel zu $A'B'$ ist. *Q.E.D.*

3.5 Tangente an zwei Kreisen konstruieren

Bemerkung 3.9. Eine Tangente durch einen Punkt P an einen Kreis $K_1(M_1, r_1)$ wird konstruiert, indem um den Mittelpunkt P_2 von M_1P der Thaleskreis $K_2(P_2, |\overline{P_2P}|)$ geschlagen wird. Es sei T der Schnittpunkt von K_1 und K_2 . Dann ist die Gerade TP eine Tangente durch den Punkt P an den Kreis K_1 , da $\sphericalangle(PTM_1) = \frac{\pi}{2}$.

Lemma 3.10. Um nun eine Tangente an zwei Kreisen $K_1(M_1, r_1)$ und $K_2(M_2, r_2)$, mit $M_1 \neq M_2$ und $r_1 \neq r_2$ zu konstruieren, müssen zunächst die Fixpunkte F_1 und F_2 der Homothetien, die K_1 auf K_2 abbilden, ermittelt werden (vgl. dazu den Beweis zu Satz 2.61). Jetzt werden jeweils durch F_1 und F_2 Tangenten an K_1 gelegt. Diese Tangenten sind gleichzeitig Tangenten an K_2 .

Beweis. Es sei ϕ eine Homothetie und $\phi(K_1) = K_2$, t eine Tangente an K_1 durch den Fixpunkt F der Homothetie ϕ und der Schnittpunkt von t und K_1 der Punkt T_1 . Die Tangente t ist dann bezüglich ϕ invariant. Dann ist $\phi(T_1) = T_2$, mit $T_2 \in K_2$ und $T_2 \in t$. Da t eine Tangente an K_1 ist, ist $\sphericalangle(FT_1M_1) = \frac{\pi}{2}$. Da ϕ Längen und Winkelverhältnisse erhält, folgt: $\sphericalangle(FT_2M_2) = \frac{\pi}{2}$. Also ist t ebenfalls eine Tangente an K_2 . *Q.E.D.*

Beispiel 3.11. Es seien K_1 und K_2 zwei Kreise, die sich nicht schneiden. (vgl. Abbildung 3.3)

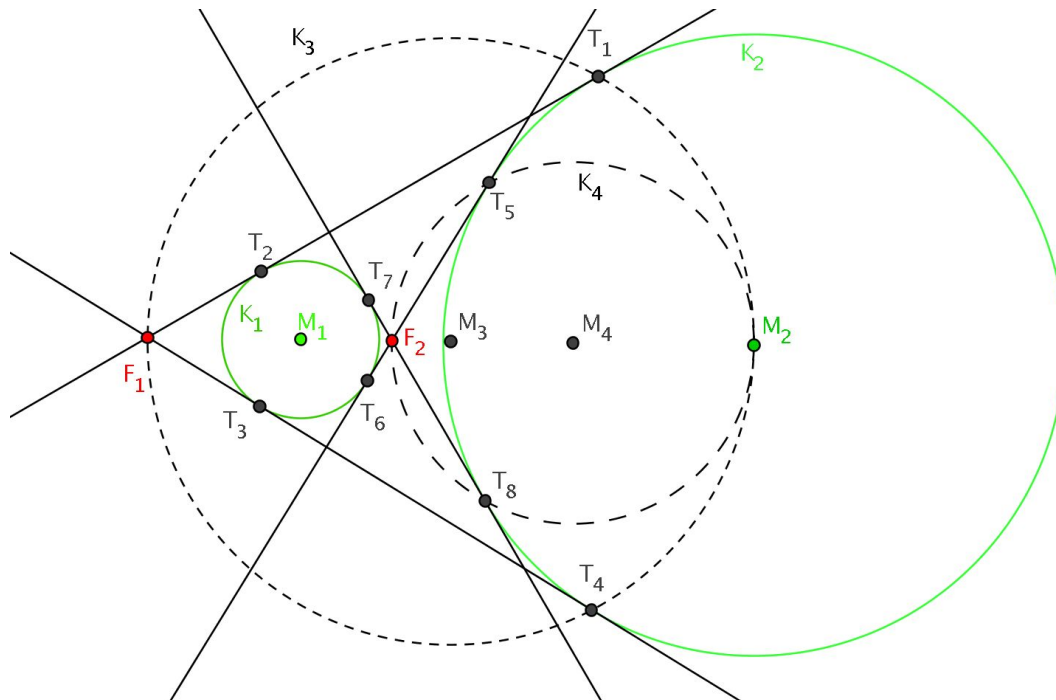


Abbildung 3.3: Tangenten an zwei Kreisen

In diesem Fall gibt es vier Geraden (T_1T_2 , T_3T_4 , T_5T_6 und T_7T_8), die sowohl K_1 als auch K_2 tangieren.

Korollar 3.12. Wenn ein Fixpunkt innerhalb einer der beiden Kreise liegt, gibt es genau zwei Tangenten an K_1 und K_2 , da K_1 und K_2 sich schneiden.

Korollar 3.13. Wenn beide Fixpunkte innerhalb einer der beiden Kreise liegen, haben die Kreise keine gemeinsamen Tangenten, da K_1 in K_2 oder K_2 in K_1 liegt.

Korollar 3.14. Wenn ein Fixpunkt F auf K_1 liegt, ist F der Berührungspunkt von K_1 und K_2 . In diesem Fall haben K_1 und K_2 drei gemeinsame Tangenten.

Korollar 3.15. Für den Fall, dass die Radien der beiden Kreise gleich groß sind und es aufgrund dessen nur einen Fixpunkt gibt, gibt es ebenfalls maximal vier Geraden, die beide Kreise tangieren. Hier verlaufen zwei Tangenten wie gehabt durch den Fixpunkt. Die anderen beiden Tangenten verlaufen parallel zu M_1M_2 durch die Punkte S_1 und S_2 , wobei S_1 und S_2 die Schnittpunkte vom Kreis K_1 und der senkrechten Gerade zu M_1M_2 durch M_1 sind.

Analog zur Konstruktion von Tangenten an zwei Kreisen in der Ebene kann überlegt werden, wie die Tangenten an zwei Kugeln im Raum verlaufen müssten.

3.6 Konstruktion eines Kreises durch zwei gegebene Punkte und einer gegebenen Tangente

Seien die Punkte P und T und die Gerade t gegeben. Um einen Kreis K_1 zu konstruieren, sodass t eine Tangente des Kreises ist und P und T auf dem Kreis liegen, wird als erstes die Mittelsenkrechte m von der Strecke $\overline{PT}$ konstruiert. Denn auf dieser Geraden m muss der Mittelpunkt des gesuchten Kreises K_1 liegen, damit P und T auf dem Kreis liegen. Der Schnittpunkt von m und t sei F .¹

Nun wird ein beliebiger Kreis K_2 konstruiert, dessen Mittelpunkt auf der Geraden m liegt und der t tangiert. Das geschieht, indem durch einen beliebigen Punkt $S_2 \in t$ eine Senkrechte s konstruiert wird: Der Schnittpunkt von s und m sei M_2 , wobei M_2 der Mittelpunkt von K_2 ist und K_2 den Radius $|M_2S_2|$ hat.

Als nächstes finden wir eine Homothetie ϕ , durch die K_2 auf K_1 abgebildet wird. Dazu wird der Schnittpunkt T_2 von TF und K_2 konstruiert. Analog ist P_2 der Schnittpunkt von K_2 und PF . Dann ist $\phi(T_2) = T$ und $\phi(P_2) = P$. Der Schnittpunkt F von T_2T und P_2P ist dann der Fixpunkt von ϕ . Da ϕ nun durch $\phi(T_2) = T$ und $\phi(P_2) = P$ bestimmt ist, kann $\phi(M_2) = M_1$ konstruiert werden, indem durch T eine Parallele zu T_2M_2 konstruiert wird. Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit m ist der Mittelpunkt M_1 von K_1 . Der gesuchte Kreis K_1 definiert sich also durch den Mittelpunkt M_1 und den Radius M_1T (vgl. Abbildung 3.4).

Beweis. Da M_1 auf der Geraden m liegen muss, T auf dem Kreis K_1 liegen muss und m die Mittelsenkrechte von PT ist, folgt, dass P ebenfalls auf K_1 liegt.

Da S_2 auf der Geraden t und der Fixpunkt F von ϕ auf t liegt, folgt, dass $\phi(S_2) = S_1$ ebenfalls auf t liegt, da t bezüglich ϕ invariant ist. Und da $\sphericalangle(FS_2M_2) = \frac{\pi}{2}$ ist, ist auch $\phi(\sphericalangle(FS_2M_2)) = \sphericalangle(FS_1M_1) = \frac{\pi}{2}$. Folglich ist t die Tangente von K_1 . Q.E.D.

Analog zu dieser Konstruktionsaufgabe kann auch ein Kreis mit zwei gegebenen Tangenten und einem gegebenen Punkt, der auf dem Kreis liegen soll, konstruiert werden.

¹Falls t und m parallel zueinander sind und aufgrund dessen keinen Schnittpunkt haben, ist der Radius des gesuchten Kreises so lang wie der Abstand von t zu m . Da der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf m liegt und der Abstand vom Mittelpunkt zu den Punkten T und P bekannt ist, kann der Kreis konstruiert werden.

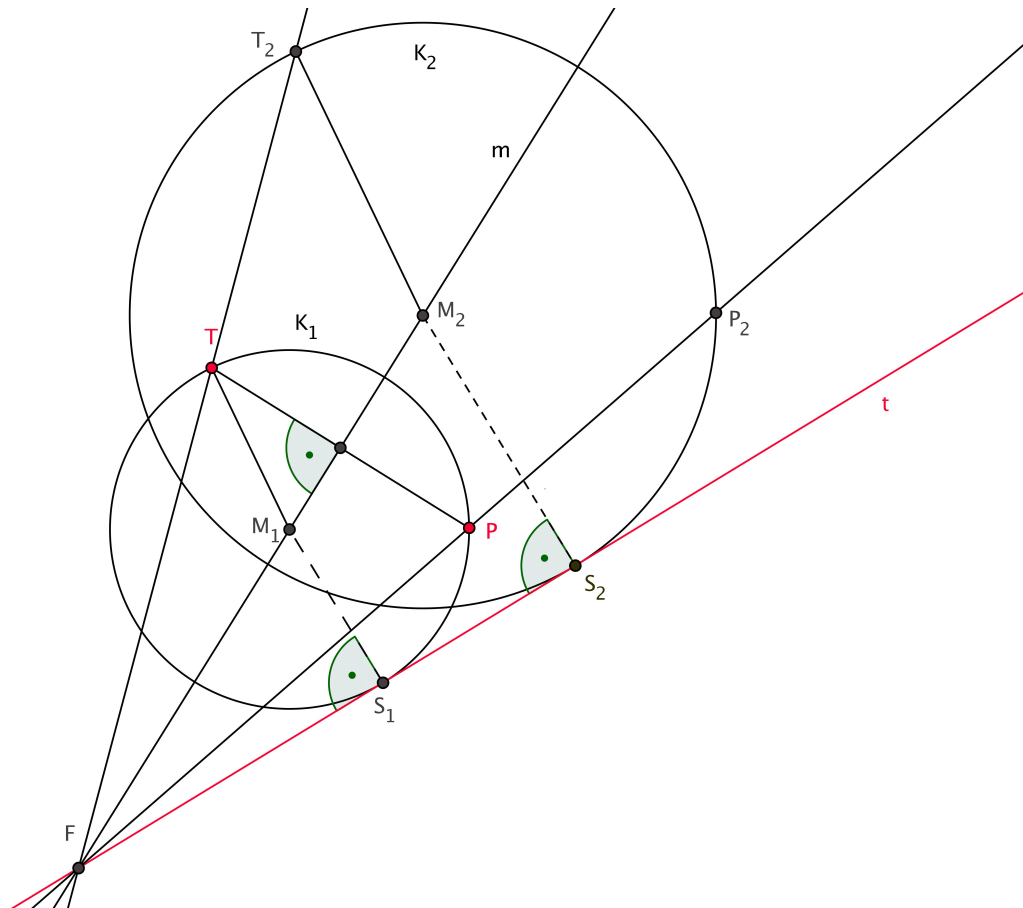


Abbildung 3.4: Kreis mit zwei gegebenen Punkten und einer Tangente

Hier wird zunächst die Winkelhalbierende der beiden Tangenten eingezeichnet. Anschließend wird ein beliebiger Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden liegt und der die beiden gegebenen Geraden tangiert, konstruiert. Schließlich wird der Kreis durch Homothetie, deren Fixpunkt der Schnittpunkt der beiden gegebenen Tangenten ist, so gestreckt, dass der gegebene Punkt auf dem Kreis liegt.

Bei drei gegebenen Tangenten ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der jeweiligen Geraden der Kreismittelpunkt. Und bei drei gegebenen Punkten, die auf dem Kreis liegen sollen, ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der jeweiligen Strecken zwischen den Punkten der Kreismittelpunkt.

3.7 Eine Sekantenkonstruktion

Seien der Kreis $K_1(M_1, r_1)$ und der Punkt A gegeben und eine Sekante gesucht, die durch A geht, K_1 in den Punkten B und C schneidet, sodass gilt: $|AB| = |BC|$.

Die Überlegung bei dieser Konstruktion ist, dass mit Hilfe einer Homothetie $\phi_{(B,-1)}$ ein zu K_1 homothetischer Kreis $K_2(M_2, r_2)$ konstruiert wird, der A beinhaltet.

Aus $\phi_{(B,-1)}$ folgt, dass $r_1 = r_2$ ist. Daraus wiederum folgt, dass M_2 den Abstand $2r$ zu M_1 haben muss. M_2 liegt also auf dem Kreis $K_3(M_1, 2r)$. Da $|M_2A| = r$ sein muss, ist M_2 der Schnittpunkt von K_3 und $K_4(A, r)$.

Da M_2 nun konstruiert ist, folgt: B ist der Schnittpunkt von M_2M_1 und K_1 und C ist der Schnittpunkt von AB und K_1 (vgl. Abbildung 3.5).

Beweis. Da ϕ den Fixpunkt B und den Streckfaktor -1 hat und $\phi(K_2) = K_1$ ist, folgt: AB ist invariant bezüglich ϕ somit ist der Schnittpunkt von AB mit K_1 der Punkt C , für den gilt: $\phi(A) = C$. Daraus folgt: $|AB| = |BC|$. *Q.E.D.*

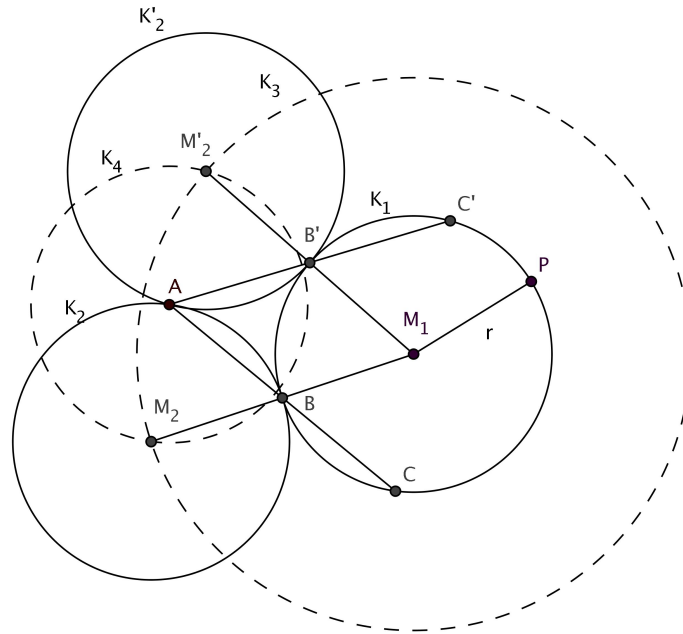


Abbildung 3.5: Sekante mit $AB=BC$

Aus der Konstruktionsbeschreibung wird deutlich, dass der Abstand von A zu M_1 höchstens $3r$ sein kann. Ansonsten ist die Konstruktion nicht möglich. Zudem wird deutlich, dass es zwei mögliche Sekanten gibt, die die Bedingungen erfüllen: Erstens AC und zweitens AC' . (vgl. Abbildung 3.5.)

Analog zu dieser Aufgabe kann die Tangente so konstruiert werden, dass BC ein x -faches von AB beträgt. Dazu ist es nur notwendig, den Radius von K_3 mit $(x+1)$ und den Radius von K_2 mit x zu multiplizieren. Dann gilt: $\phi(M_2) = M_1$, $|M_2B| = x|M_1B|$ und

$\phi(A) = C$. Und daraus folgt bereits, dass $|AB| = x|BC|$. Bei dieser Konstruktion darf $|AM_1|$ jedoch nicht größer sein als $x2r + 1$.

3.8 Quadrat im Dreieck einbinden

Es sei ein Dreieck $\triangle ABC$ gegeben. Um ein Quadrat $DEFG$ zu konstruieren, dessen Eckpunkte auf $\triangle ABC$ liegen, muss zunächst ein Quadrat $D'E'F'G'$, das zum Quadrat $DEFG$ ähnlich ist, konstruiert werden, sodass $D'E'G'$ auf den Seiten von $\triangle ABC$ liegen:

Dazu wird D' beliebig auf eine Seite des Dreiecks gelegt. Es sei nun $D' \in AB$. Nun wird die Senkrechte s zu AB durch den Punkt D' konstruiert, der Schnittpunkt von s und AC sei G' . Jetzt wird die Länge $|D'G'|$ von D' entgegen der Richtung $\overrightarrow{D'A}$ abgetragen, indem ein Kreis $K_1(D', |D'G'|)$ konstruiert wird. Der Schnittpunkt von K_1 und AB , der von D' aus entgegen der Richtung $\overrightarrow{D'A}$ liegt, ist E' . Weiter sei der Schnittpunkt von $K_2(E', D'G')$ und $K_3(G', D'G')$ der Punkt F' . Jetzt gilt: $D', E' \in AB$ und $G' \in AC$.

Sei F der Schnittpunkt von AF' und BC . Dann gibt es eine Homothetie ϕ , die den Punkt F' auf F abbildet und den Fixpunkt A hat. Nun werden durch die Homothetie ϕ die Punkte $D = \phi(D')$, $E = \phi(E')$ und $G = \phi(G')$ konstruiert (vgl. Abbildung 3.6). D, E, F, G liegen dann alle auf $\triangle ABC$.

Beweis. Da A der Fixpunkt von ϕ ist, sind AB und AC invariant bezüglich ϕ . Da G' auf AC liegt und D', E' auf AB liegen, liegen D, E auf AB und G auf AC . Folglich liegen die Punkte D, E, F, G auf den Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$. Und da $D'E'F'G'$ ein Quadrat ist, ist auch $\phi(D')\phi(E')\phi(F')\phi(G') = DEFG$ ein Quadrat. *Q.E.D.*

Äquivalent zu dieser Konstruktion kann auch ein Rechteck mit vorgegebenen Längenverhältnissen so konstruiert werden, dass die Eckpunkte des Rechtecks auf den Seiten eines vorgegebenen Dreiecks liegen. Dazu wird ebenfalls ein ähnliches Rechteck konstruiert, bei dem drei Eckpunkte bereits auf den Seiten des Dreiecks liegen. Anschließend wird das Rechteck passend gestreckt, sodass alle Eckpunkte des gestreckten Rechtecks auf den Seiten des Dreiecks liegen.

3.9 Dreieck durch seine Höhen konstruieren

Um ein Dreieck $\triangle ABC$ zu konstruieren, dessen Längen der Höhen h_a , h_b und h_c gegeben sind, bedarf es einer kurzen Vorüberlegung:

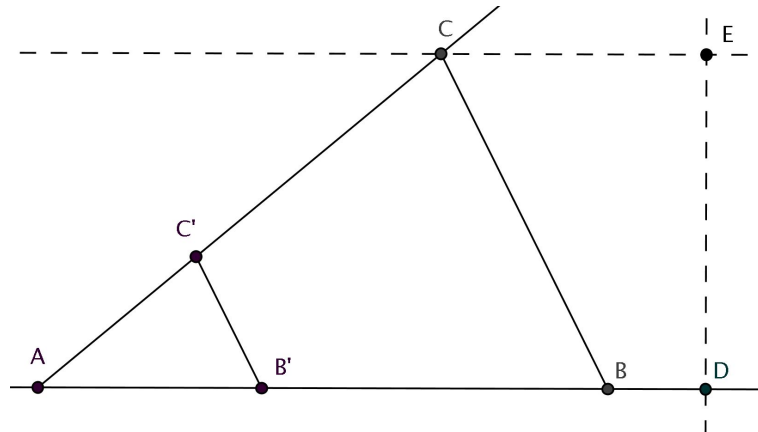


Abbildung 3.7: Dreieckskonstruktion

Dreieck eindeutig definiert.

3.10 Konstruktion einer Parallelen mit Lineal und einer gegebenen Längeneinheit

Satz 3.18. *Seien ein Punkt P und eine Gerade g gegeben und die Parallele zu g durch P gesucht. Um diese Parallele nur mit einem Lineal und einer gegebenen Längeneinheit zu konstruieren, wird zunächst eine beliebige Gerade, die durch P verläuft und g schneidet, gelegt. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit g sei A . Nun wird von A aus die gegebene Längeneinheit zweimal auf g abgetragen, sodass die Punkte B und C entstehen, für die gilt: $|AB| = |BC|$. Anschließend wird ein Punkt R auf AP konstruiert, wobei R so gewählt wird, dass P zwischen A und R liegt. Es sei nun Q der Schnittpunkt von BR und PC und S der Schnittpunkt von AQ und CR (vgl. Abbildung 3.8). Dann ist PS parallel zu g .*

Beweis. Für den Beweis konstruieren wir zunächst eine Hilfsgerade h , die parallel zu g durch den Punkt Q verläuft. Der Schnittpunkt von h mit AR sei O und der Schnittpunkt von h mit CR sei U . Dann gibt es eine Homothetie α mit dem Fixpunkt R und dem Streckfaktor x , die $\overline{OQ}$ auf $\overline{AB}$ und $\overline{QU}$ auf $\overline{BC}$ abbildet. Folglich gilt: $|OQ| = |QU|$, da $|AB| = |BC|$ und h parallel zu g ist. Daraus folgt, dass es eine Homothetie β gibt, die den Fixpunkt P hat und die Strecke $\overline{OQ}$ auf die Strecke $\overline{AC}$ abbildet. Die Homothetie β hat dann den Streckfaktor $2x$. Also gilt:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot 2x = \overrightarrow{PC} \quad (3.1)$$

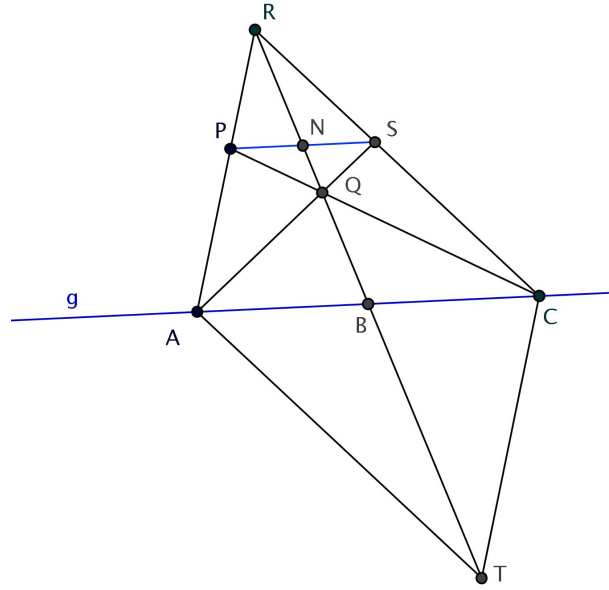


Abbildung 3.8: Parallelenkonstruktion

Außerdem gibt es nach der obigen Aussage eine Homothetie γ , die den Fixpunkt S hat und die Strecke $\overline{QU}$ auf die Strecke $\overline{AC}$. Dementsprechend hat auch γ den Streckfaktor $2x$, sodass gilt:

$$\overrightarrow{SQ} \cdot 2x = \overrightarrow{SA} \quad (3.2)$$

Aus den Gleichungen (3.1) und (3.2) folgt nach Lemma 3.8, dass es eine Homothetie mit dem Fixpunkt Q gibt, sodass die Strecke $\overline{PS}$ auf die Strecke $\overline{AC}$ abgebildet wird. Daraus wiederum folgt, dass PS parallel zu AC ist.

Q.E.D.

Satz 3.19. *Es seien $\overline{AC}$ und $\overline{PS}$ zwei Strecken, die parallel zueinander sind, Q der Schnittpunkt von AS und CP und R der Schnittpunkt von CS und AP (vgl. Abbildung 3.8). Dann halbiert die Gerade RQ die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{PS}$.*

Beweis. (i) Es sei ψ die Homothetie mit dem Fixpunkt Q und $\psi(P) = C$. Dann ist $\psi(S) = A$, da PS parallel zu AC ist und Q auf SA liegt. Es sei $\psi(R) = T$. Dann ist AT parallel zu RS und CT parallel zu PR . Daraus folgt, dass $ATCR$ ein Parallelogramm ist. Da die Punkte B , Q und R kollinear sind und QR eine invariante Gerade von ψ ist, sind auch die Punkte T , R und B kollinear. Da TR eine Diagonale des Parallelogramms $ATCR$ ist und B auf TR liegt, halbiert B die zweite Diagonale AC vom Parallelogramm $ATCR$.

- (ii) Es sei δ eine Homothetie mit dem Fixpunkt R , sodass $\delta(P) = A$ ist. Dann folgt $\delta(S) = C$, da AC parallel zu PS ist und SC eine invariante Gerade von δ ist. Weiter ist $\delta(N) = B$, da PN parallel zu AB ist und NB eine invariante Gerade von δ ist. Da $\phi(P) = A$, $\phi(N) = B$ und $\phi(S) = C$ und $|AB| = |BC|$ nach (i), gilt, dass $|PN| = |NS|$. Somit ist gezeigt, dass QR die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{PS}$ halbiert.

Q.E.D.

3.11 Die Eulergerade

Lemma 3.20. *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und seien M_a , M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten von $\triangle ABC$. Dann ist $\triangle ABC$ homothetisch zu $\triangle M_a M_b M_c$. Das heißt, es gibt eine Homothetie ψ , die das Dreieck $\triangle ABC$ auf das Dreieck $\triangle M_a M_b M_c$ abbildet.*

Beweis. Da $|AM_b| = |M_bC|$ und $|BM_a| = |M_aC|$ folgt nach dem Strahlensatz, dass $M_b M_a$ parallel zu AB ist. Analog sind $M_c M_a$ parallel zu CA und $M_b M_c$ parallel zu BC . Außerdem folgt nach dem Strahlensatz: $\overrightarrow{M_a M_b} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{M_c M_b} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{M_a M_c} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$. Folglich gibt es nach dem Satz 2.57 eine Homothetie ψ , für die gilt: $\psi(A) = M_a$, $\psi(B) = M_b$ und $\psi(C) = M_c$. Die Seitenhalbierenden von $\triangle ABC$ sind also invariante Geraden von ψ . Somit ist der Schwerpunkt S von $\triangle ABC$ der Fixpunkt von ψ , da sich die invarianten Geraden AM_a , BM_b und CM_c im Punkt S schneiden. Der Streckfaktor von ψ ist $-\frac{1}{2}$, da $\overrightarrow{AB} \cdot -\frac{1}{2} = \overrightarrow{M_a M_b}$. *Q.E.D.*

Satz 3.21 (Eulergerade). *Der Höhenschnittpunkt H , der Schwerpunkt S und der Mittelsenkrechtenschnittpunkt M eines Dreiecks sind kollinear. Im Falle $H \neq S$ ist $S \in HM$ und $|\overline{HS}| = 2 \cdot |\overline{MS}|$ (vgl. Abbildung 3.9).*

Die Gerade ist nach *Leonhard Euler* (1707-1783) benannt worden [Schupp, 1998, S. 143.].

Beweis. Sei ψ die Homothetie aus Lemma 3.20. Da $\psi(A) = M_a$ ist und die Mittelsenkrechte von a parallel zur Höhe von a ist, wird die Höhe auf der Seite a durch ψ auf die Mittelsenkrechte auf der Seite a abgebildet: $\psi(h_a) = m_a$.

Analog gilt: $\psi(h_b) = m_b$ und $\psi(h_c) = m_c$. Daraus folgt, dass der Höhenschnittpunkt H durch ψ auf den Mittelsenkrechtenschnittpunkt M abgebildet wird. Und da S der Fixpunkt von ψ ist und $\psi(H) = M$ ist, sind H, M, S kollinear. Da der Streckfaktor von ψ $-\frac{1}{2}$ ist, ist $|\overline{HS}| = 2 \cdot |\overline{SM}|$. *Q.E.D.*

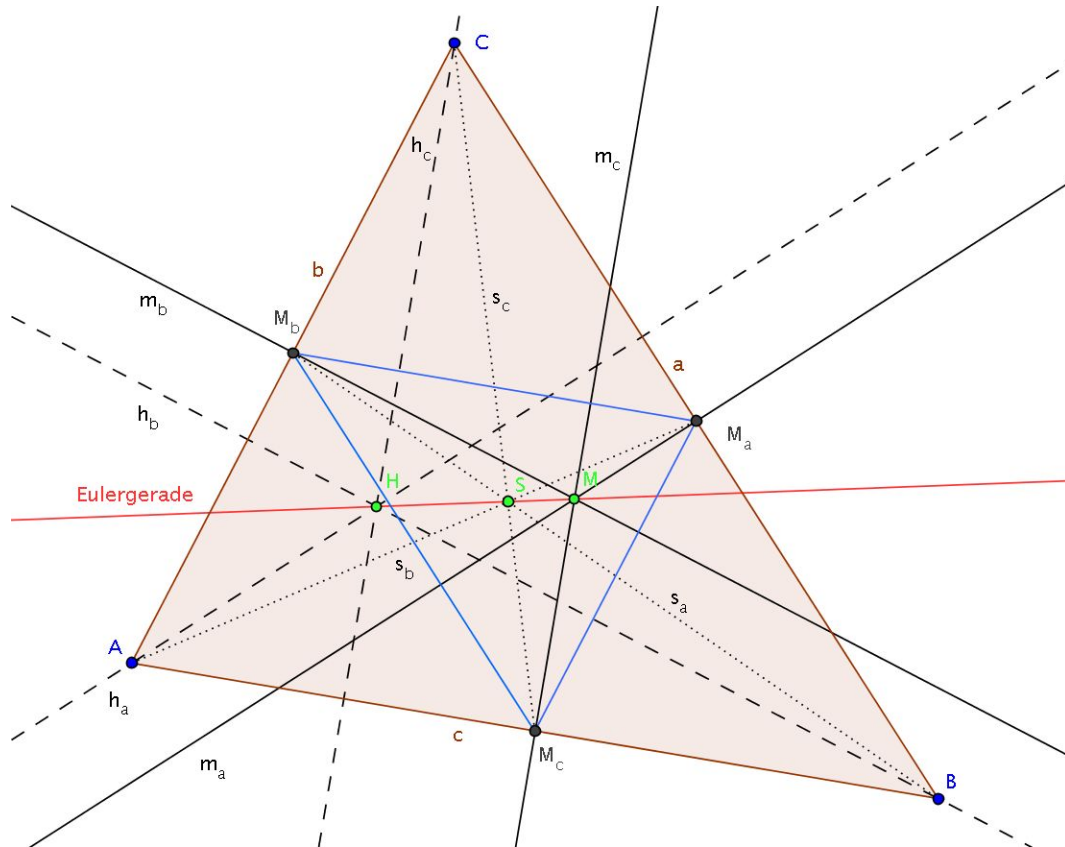


Abbildung 3.9: Eulergerade

3.12 Der Feuerbachkreis

Satz 3.22 (Feuerbachkreis). *In einem Dreieck liegen die Seitenmitten M_a, M_b, M_c , die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c und die Halbierungspunkte A', B', C' der Strecken, die den Höhenschnittpunkt H mit den Eckpunkten A, B, C verbinden, auf einem Kreis. Der Mittelpunkt Z dieses Kreises liegt auf der Eulergeraden und halbiert die Strecke zwischen Höhenschnittpunkt H und Mittelsenkrechtenschnittpunkt M (vgl. Abbildung 3.10).*

Beweis. Es sei $\lambda_{(H, \frac{1}{2})}$ eine Homothetie, dann ist $\Delta\lambda(A)\lambda(B)\lambda(C) = \Delta A'B'C'$, da A', B', C' die Mittelpunkte von $\overline{HA}, \overline{HB}, \overline{HC}$ sind.

Wie bereits in Lemma 3.20 gezeigt worden ist, gibt es eine Homothetie $\phi_{(S, -2)}$, sodass

$$\Delta\phi(M_a)\phi(M_b)\phi(M_c) = \Delta ABC.$$

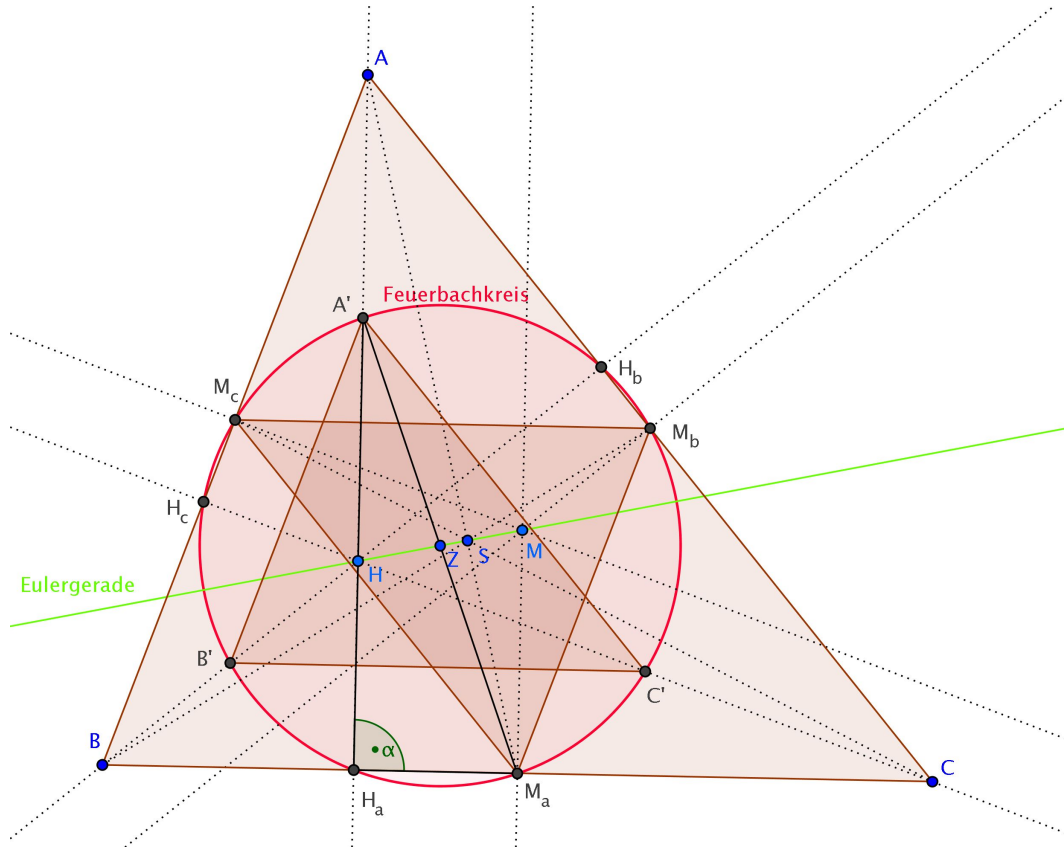


Abbildung 3.10: Feuerbachkreis

Daraus folgt, dass es eine Homothetie $\delta = \phi \circ \lambda$ gibt, sodass gilt:

$$\Delta\delta(M_a)\delta(M_b)\delta(M_c) = \Delta A'B'C'$$

Da H der Höhenschnittpunkt von $\Delta A'B'C'$ ist und M der Höhenschnittpunkt von $\Delta M_a M_b M_c$ ist, gilt für δ : $\delta(M) = H$.

Der Streckfaktor von δ ist $\frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$ (vgl. Lemma 2.47). Der Fixpunkt Z von δ ist also der Mittelpunkt von $\overline{HM}$.

Daraus folgt, dass Z auf der Eulergeraden liegt und die Strecke $\overline{HM}$ halbiert.

Da $\overline{HM} \cdot \frac{1}{2} = \overline{HZ}$ ist, ist $\lambda(M) = Z$. Daraus folgt, dass der Umkreismittelpunkt M von ΔABC durch λ auf Z abgebildet wird und Z folglich der Umkreismittelpunkt von $\Delta A'B'C'$ ist. Der Umkreis von $\Delta A'B'C'$ sei K . Da $\delta(M_a) = A'$, $\delta(M_b) = B'$ und $\delta(M_c) = C'$ und δ den Fixpunkt Z und den Streckfaktor -1 hat, haben M_a , M_b , M_c , A' , B' und C' den selben Abstand zu Z und liegen deswegen auf dem Kreis K .

Darüber hinaus ist die Strecke $\overline{A'M_a}$ eine Mittelpunktssehne von K , da $Z \in A'M_a$. Und

da $\sphericalangle(M_a H_a A') = \frac{\pi}{2}$ ist, folgt nach der Umkehrung des Thalesatzes, dass H_a auf dem Kreis K liegt. Analog folgt, dass H_c und H_b auf dem Kreis K liegen.

Somit ist gezeigt, dass die Punkte H_a , H_b , H_c , M_a , M_b , M_c , A' , B' und C' auf einem Kreis K liegen, dessen Mittelpunkt Z ist. *Q.E.D.*

Satz und Kreis sind nach *Karl Wilhelm Feuerbach* (1800-1834) benannt worden [Schupp, 1998, S. 145].

Literaturverzeichnis

[1] <http://www.techno-science.net/?onglet=glossaire&definition=5528>

Datum: 27.02.2007.

[Schupp, 1998] Schupp, Hans: *Figuren und Abbildungen* (Studium und Lehre: Mathematik). Hildesheim, Berlin 1998.

[Schupp, 1974] Schupp, Hans: *Abbildungsgeometrie*, 4. überarbeitete Auflage, Basel und Weinheim 1974.

[Coxeter, 1981] Coxeter, Harold S. M.: *Unvergängliche Geometrie* (Wissenschaft und Kultur Bd. 17), 2. erweiterte und überarbeitete Auflage, Basel, Bosten und Stuttgart 1981.