Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Mathematik 1 für Chemie
Präsenzübungsblatt 2[1]

Aufgabe 1. Es sei M eine Menge. Für eine Teilmenge $X \subseteq M$ bezeichne $X^c = M \setminus X$ das *Komplement* von X in M. Seien $X, Y, Z \subseteq M$ beliebige Teilmengen. Zeigen Sie:

(1) $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$,
(2) $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$,
(3) $X^c \setminus Y = (X \cup Y)^c$,
(4) $X \setminus (Y \cup Z) = X \cap (Y \cup Z)^c = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) = X \cap Y^c \cap Z^c$.

Zeichnen Sie Mengendiagramme, die die jeweiligen Mengen illustrieren.

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ nicht-negative ganze Zahlen mit $k \leq n$. Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ (sprich "k aus n") ist definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

wobei, für $m \in \mathbb{N}_0$,

$$m! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m \qquad \text{sprich "}m\text{ Fakultät".}$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(1) Für $k < n$ gelten die Identitäten
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
(2) Es gilt $\binom{2n}{n} \geq 2^n$.
(3) Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen, ist $\binom{n}{k}$.

Aufgabe 3. Seien A, B und C Aussagen. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen *Tautologien* sind, d.h. den Wahrheitswert w haben bei jeder Belegung der Aussagen A, B, C mit Wahrheitswerten w bzw. f.

(1) $A \vee (\neg A)$
(2) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$
(3) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$
(4) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

"Übersetzen" sie jede der Aussagen in einen informellen deutschen Satz.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die folgenden Aussagen über eine reelle Zahl x.

(1) $x > 17 \vee x < 0$.
(2) $x \in \mathbb{Q}$.
(3) $x > \pi \wedge x < 0$.
(4) $x^2 > 0$.

[1] Die Präsenzübungen beginnen in Woche 2. Es gibt kein Präsenzübungsblatt 1.

Geben Sie informelle Beschreibungen der jeweiligen Aussagen. Negieren (d.h. verneinen) Sie sie, sowohl formal als auch informell. Beschreiben Sie die Teilmengen der reellen Zahlen, die durch die 4×2 Aussagen jeweils beschrieben werden.

Eine *Aussageform* (oder ein *Prädikat*) ist, sehr informell gesprochen, ein Ausdruck, der eine (oder mehrere) Variable(n) enthält und durch Belegung der Variable(n) zu einer Aussage wird. Ein Beispiel ist die Aussageform $A(x)$ definiert als "x ist eine Stadt in NRW"; A(Bielefeld) ist wahr, A(Ulm) hingegen falsch. Eine Art, von Aussageformen zu Aussagen zu kommen, ist, die Aussageformen zu *quantifizieren*. Wir schreiben

$$\forall x : A(x)$$

für die Aussage (!), dass $A(x)$ *für alle* x gilt. Das Symbol $\forall$ ist der sogenannte *Allquantor*. Desweiteren schreiben wir

$$\exists x : A(x)$$

für die Aussage, dass ein x *existiert*, für das $A(x)$ gilt. Das Symbol $\exists$ ist der sogenannte *Existenzquantor*. Hierbei muss natürlich klar sein, aus welcher Menge x zu wählen ist und was die Aussageform A bedeutet. Variiert x in der Menge der deutschen Städte und ist $A(x)$, wie oben, das Prädikat "x ist eine Stadt in NRW", so ist die Aussage $\forall x : A(x)$ falsch (Ulm ist ein Gegenbeispiel), die Aussage $\exists x : A(x)$ jedoch wahr (Bielefeld liegt in NRW). Für die Negation quantifizierter Prädikate gelten die folgenden Regeln

$$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$$
$$\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$$

Aufgabe 5. Formulieren Sie die folgenden Aussagen in der Sprache der Aussagenlogik:

(1) Auf jeden Topf passt ein Deckel.
(2) Kein Deckel passt auf alle Töpfe.
(3) Es gibt einen Deckel, der nicht auf alle Töpfe passt.
(4) Es gibt einen Deckel, der auf alle Töpfe passt.
(5) Für manche Töpfe gibt es keine passenden Deckel.
(6) Einige Deckel passen auf gar keinen Topf.

Negieren Sie diese Aussagen.

Aufgabe 6. Es bezeichne Z die Menge aller krankheitserregender Inhaltsstoffe von Zigarettenrauch, K die Menge aller Krankheiten, und $V(x, y)$ die Aussageform "x verursacht y". Beurteilen Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen.

(1) $\exists z \in Z, \exists k \in K : V(z, k)$
(2) $\forall z \in Z, \exists k \in K : V(z, k)$
(3) $\exists k \in K, \forall z \in Z : V(z, k)$
(4) $\exists z \in Z, \forall k \in K : V(z, k)$
(5) $\forall k \in K, \exists z \in Z : V(z, k)$
(6) $\forall z \in Z, \forall k \in K : V(z, k)$

Negieren Sie diese Aussagen.