Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Mathematik 1 für Chemie
Präsenzübungsblatt 3

Es sei i eine (formale) Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Die Menge

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

heißt die Menge der *komplexen Zahlen.*

Wir betrachten die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ vermöge der Abbildung

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad a \mapsto a + i0.$$

Komplexe Zahlen können durch Punkte in der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ visualisiert werden vermöge der Abbildung

$$\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad a + ib \mapsto (a, b).$$

Man spricht daher auch von der "komplexen Ebene $\mathbb{C}$".

Aufgabe 1. Sind die Abbildungen ϕ bzw. ψ injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2. Fertigen Sie eine Skizze der komplexen Ebene an, in der Sie die Punkte 0, 1, i, $-i$, $1 + i$, $\frac{1}{2} + 3i$ und das Bild der Abbildung $\psi \circ \phi$ kennzeichnen.

Gegeben zwei komplexe Zahlen $z = a + ib$ und $z' = c + id$, so ist ihre *Summe* definiert als

$$z + z' := (a + c) + i(b + d),$$

ihr *Produkt* als

$$zz' := ac + ibc + iad + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Das *Negative* von z ist $-z = -a - bi$. In der Tat gilt

$$(a + ib) + (-a + ib) = (a - a) + i(b - b).$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie (ohne Hilfe eines Rechners!) Summe $z + z'$ und Produkt zz' der folgenden Komplexen Zahlen:

(1) $(z, z') = (1 + i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)$,
(2) $(z, z') = (6 + 3i, 10 + 8i)$,
(3) $(z, z') = (3 + 2i, 3 - 2i)$.

Aufgabe 4. Weisen Sie nach, dass

(1) die *Kommutativgesetze*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} : \; z + z' = z' + z, \quad zz' = z'z$$

sowie

(2) das *Distributivgesetz*

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}: \ (z + z')z'' = zz'' + z'z''$$

gelten.

Aufgabe 5. Zeigen Sie: eine von 0 verschiedene komplexe Zahl z hat ein eindeutig bestimmtes multiplikatives *Inverses* z^{-1}, ausgezeichnet durch die Tatsache, dass $zz^{-1} = 1$ gilt.

Aufgabe 6. Berechnen Sie die Inversen der folgenden komplexen Zahlen:

$$1 + i, \quad -i, \quad 1/2, \quad 3 - 4i.$$

Das *Komplexkonjugierte* von $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ist

$$\overline{z} = a - ib \in \mathbb{C}.$$

Der *Absolutbetrag* $|z|$ von z ist die (nichtnegative) reelle Zahl $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Aufgabe 7. Kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze der komplexen Zahlenebene die Menge

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Aufgabe 8. Zeigen Sie:

(1) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

(2) Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

(a)

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

(b)

$$|z| = |\overline{z}|, \quad |zw| = |z||w|, \quad |z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2.$$

(c)

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \text{[Dreiecksungleichung]}.$$