Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Winterersemester 2017/18

Mathematik 1 für Chemie
Präsenzübungsblatt 4

Definition. Ein (komplexes) Polynom ist eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Die Zahlen a_i heißen die *Koeffizienten* von f. Ist $a_n \neq 0$, so ist n der *Grad* von f, geschrieben $\deg(f)$.

Spezialfälle sind die konstanten ($\deg(f) = 0$), linearen ($\deg(f) = 1$) und quadratischen ($\deg(f) = 2$) Polynome. Man schreibt auch $f(x)$ anstatt f, um die Abhängigkeit von der "Variablen" x (die natürlich auch anders heißen kann) zu betonen. Die Menge aller Polynome bezeichen wir mit $\mathbb{C}[x]$.

Folgender Satz ist ein wichtiges Analogon der "Division mit Rest" von ganzen Zahlen.

Satz 1 (Polynomdivision)**.** *Seien $f, g \in \mathbb{C}[x]$ Polynome mit $g \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome q und r derart, dass*

$$f = gq + r \text{ und } \deg r < \deg g.$$

Sprechweise: "q ist das Result der Divison von f durch g, mit Rest r."

Beispiel 1.

$$\underbrace{x^3 + 2x^2 + 2x + 3}_{f} = \underbrace{(x^2 + 1)}_{g} \underbrace{(x + 2)}_{q} + \underbrace{x + 1}_{r}.$$

Beachten Sie: $\deg(x + 1) = 1 < \deg(x^2 + 1) = 2$.

Aufgabe 1. Gegeben die folgenden Paare (f, g) von Polynomen, bestimmen Sie jeweils q und r wie in Satz 1.

f	g
$x + 2$	$x + 1$
$x^2 + x + 1$	$x - 1$
$x^3 - 7x^2 + 16x - 11$	$x - 1$
$14x^4 - x^3 + 5x^2 - 3x + 1$	$7x^2 - 4x + 1$

Die Polynomdivision ist ein wichtiges Werkzeug zur vollständigen Faktorisierung komplexer Polynome als Produkte von Linearfaktoren. Zur Erinnerung: Eine *Nullstelle* eines Polynoms $f \in \mathbb{C}[x]$ ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ derart, dass $f(\lambda) = 0$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Ist f ein Polynom vom Grad $n > 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, so gibt es ein Polynom q vom Grad $n - 1$ derart, dass

$$f = q \cdot (x - \lambda)$$

gilt. Sprechweise: Der der Nullstelle λ zugeordnete Linearfaktor $x - \lambda$ teilt das Polynom f. (Hinweis: Polynomdivision.)

Dass ein komplexes Polynom stets eine Nullstelle hat, ist selbst ein wichtiges Resultat:

Satz 2 (Fundamentalsatz der Algebra, Carl Friedrich Gauß (1799))**.** *Jedes Polynom f hat eine komplexe Nullstelle: es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f(\lambda) = 0$.*

Korollar. *Sei f ein komplexes Polynom vom Grad $n > 0$. Dann hat f, mit Multiplizitäten gerechnet, genau n Nullstellen: Es gibt komplexe Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, c$ mit $k \leq n$ und positive ganze Zahlen $m_1, \ldots, m_k$ derart, dass*

$$f(x) = c(x - \lambda_1)^{m_1} \ldots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

und $\sum_{j=1}^{k} m_j = n$. Die λ_j sind die (paarweise verschiedenen) Nullstellen von f, die m_j heißen ihre Multiplizitäten. *Ist $c = 1$, so nennt man f* normiert.

Man sagt, ein komplexes Polynom f zerfalle vollständig in Linearfaktoren.

Beispiel 2. Das normierte Polynom

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i) \in \mathbb{C}[x]$$

hat die zwei verschiedenen Nullsten i (die imaginäre Einheit) und $-i$, jeweils mit Multiplizität $m = 1$. Beachten Sie: Über $\mathbb{R}$ können wir x^2+1 nicht derart faktorisieren; das ist genau der Grund, warum wir zu den *komplexen* Zahlen übergegangen sind.

Aufgabe 3. Faktorisieren Sie folgende Polynome vollständig.

(1) $x^4 - 5x^2 + 4$,
(2) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$,
(3) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$,
(4) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.

Hinweise: (1) ist wirklich ein quadratisches Polynom in $y = x^2$. Die anderen Polynome haben jeweils $\lambda = 1$ als Nullstelle.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(1) $\sum_{j=1}^{n}(2j - 1) = n^2$,
(2) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \binom{n+1}{2}^2$,
(3) $\sum_{j=1}^{n}(2j - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Aufgabe 5. Betrachten Sie folgenden "Beweis" der (absurden) Behauptung

Auf einer Party mit $n \geq 1$ Gästen heißen alle Gäste gleich.

Pseudobeweis: *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ stimmt die Behauptung aus trivialen Gründen.

Induktionsschritt: Es seien $n + 1$ Gäste auf der Party. Wir müssen zeigen, dass sie alle den gleichen Namen haben unter der Induktionsannahme, dass jeweils n Partygäste den gleichen Namen haben.

Sondern wir zuerst einen Gast ab und betrachten die verbleibenden n Gäste, so haben diese, eben nach Induktionsvoraussetzung, alle den gleichen Namen. Nun holen wir den "Außenseiter" wieder dazu und sondern dafür einen einen anderen Gast aus. (Solch einer existiert, da $n+1 \geq 2$.) Auch die nun verbleibenden n Gäste haben alle den gleichen Namen. Also haben alle $n + 1$ Gäste den gleichen Namen.

Wo hakt die Logik?