Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Winterersemester 2017/18

Mathematik 1 für Chemie
Präsenzübungsblatt 6

Aufgabe 1. (= Aufgabe 3 auf dem letzten Präsenzübungsblatt) Begründen Sie folgende trigonometrischen Identitäten anschaulich am Einheitskreis

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Es seien $\theta \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

(1) $\sin(\theta) = \sin(\theta + 2\pi n)$,
(2) $\sin(\theta) = -\sin(-\theta)$,
(3) $\cos(\theta) = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$,
(4) $\sin(0) = \sin(\pi) = \cos(\pi/2) = 0$,
(5) $\cos(0) = -\cos(\pi) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,
(6) $\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$.

Finden Sie zu (1) und (2) analoge Identitäten für die Funktion cos.

Aufgabe 2. Betrachten Sie die folgenden Folgen. Bestimmen Sie jeweils, ob sie konvergieren oder divergieren. Im Falle der Konvergenz, bestimmen Sie den Grenzwert. Im Falle der Divergenz, entscheiden Sie, ob bestimmte oder ungestimmte Konvergenz vorliegt. Begründen Sie Ihre Antworten.

(1)
$$\left(\frac{1}{t^2}\right)_{t\in\mathbb{N}_0},$$

(2)
$$\left(\frac{(-1)^m}{m+2}\right)_{m\in\mathbb{N}_0},$$

(3)
$$\left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0},$$

(4)
$$\left((-1)^n + (-1)^{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}_0},$$

(5)
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \text{ wobei } x_0 = -3 \text{ und } x_n = 3x_{n-1} \text{ für } n \geq 1,$$

(6)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Aufgabe 3.

(1) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Vereinfachen Sie den folgenden polynomiellen Ausdruck:

$$(1-x)\sum_{i=0}^{n} x^i.$$

(2) Sei $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| < 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$.

(3) Schließen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-c}$$

gilt. Hinweis: Benutzen Sie die Rechenregeln für Grenzwerte.