Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Mathematik 1 für Chemie
Präsenzübungsblatt 7

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die *Exponentialreihe*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert. Hinweis: Quotientenkriterium.

Das (Cauchy-)Produkt von Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ist die Reihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass, für alle $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$$

gilt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{z\to 0} \frac{\exp(z)-1}{z} = 1$$

gilt. Schließen Sie, dass, für alle $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\exp(z)-\exp(z_0)}{z-z_0} = \exp(z_0).$$

Wir schreiben e für $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2,71828\ldots$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass, für alle $r \in \mathbb{Q}$,

$$\exp(r) = e^r.$$

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass, für $t \in \mathbb{R}$, die Identität

$$\overline{e^{it}} = e^{-it}$$

gilt. (Hierbei bezeichnet $^-$ komplexe Konjugation.) Schließen Sie, dass

$$\{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Bemerkung. In Wahrheit gilt sogar Gleichheit. Die Zahl t (modulo 2π) kann als die Länge des Kreisbogens interpretiert werden, der zwischen den Zahlen 1 und e^{it} durchlaufen wird (gegen den Uhrzeigersinn, wenn $t \geq 0$, im Uhrzeigersinn, wenn $t < 0$). Insbesondere gilt die *Eulersche Identität*

$$e^{i\pi} = -1,$$

die, nach Addition beider Seiten mit 1, gleich fünf der wichtigsten mathematischen Konstanten überaus elegant zusammenführt.