Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 5

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 17. Mai 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Seien V ein K-Vektorraum und $U_1, \dots, U_r$ K-lineare Unterräume von V. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(1) $V = \bigoplus_{i=1}^r U_i$,
(2) $V = \sum_{i=1}^r U_i$ und $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = 0$ für $i = 1, \dots, r$.

Zeigen Sie weiter: Ist $\dim V < \infty$, so sind (1) und (2) auch äquivalent zu

$$\dim V = \dim \left(\sum_{i=1}^r U_i \right) = \sum_{i=1}^r \dim U_i. \tag{3}$$

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit charakteristischem Polynom χ_A und sei

$$\phi_A : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K), \quad M \mapsto MA.$$

Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom von ϕ_A gilt:

$$\chi_{\phi_A} = \chi_A^n.$$

Hinweis: Stellen Sie die lineare Abbildung ϕ_A bezüglich einer geeigneten K-Basis von $\mathrm{Mat}_n(K)$ durch eine Matrix dar.

Aufgabe 3. Betrachten Sie, für $x \in \mathbb{R}$, die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & x & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

(1) Zeigen Sie, dass $\lambda = 5$ ein Eigenwert von $A(x)$ ist, und bestimmen Sie die algebraische Multiplizität $m_{A(x)}(5)$.
(2) Nach Proposition 2.14 der Vorlesung gilt $\dim_{\mathbb{R}} V_5(A(x)) \leq m_{A(x)}(5)$. Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ gilt $\dim_{\mathbb{R}} V_5(A(x)) = m_{A(x)}(5)$? Für welche gilt $\dim_{\mathbb{R}} V_5(A(x)) = 1$?

Aufgabe 4. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

(1) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A und die Eigenwerte von A.
(2) Diagonalisieren Sie A.
(3) Zeigen Sie: Es gibt eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine lineare Rekursionsgleichung für die Glieder dieser Folge.
(4) Schließen Sie, dass mit $\phi := (1 + \sqrt{5})/2$ und $\psi := (1 - \sqrt{5})/2$ gilt:

$$u_n = (\phi^n - \psi^n)/\sqrt{5} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$