Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 15

Es sei K ein beliebiger Körper.

Aufgabe 1. Seien $h_1, \dots, h_m \in K[X]$ normierte, paarweise verschiedene Primpolynome und $1 \leq r_i \leq s_i$ natürliche Zahlen für $i = 1, \dots, m$. Gibt es einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum V und einen Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ mit Minimalpolynom $\mu_f = \prod_{i=1}^m h_i^{r_i}$ und charakteristischem Polynom $\chi_f = \prod_{i=1}^m h_i^{s_i}$?

Aufgabe 2. Sei $m \in \mathbb{N}$.

(1) Zeigen Sie: Für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt
$$(SAS^{-1})^m = SA^mS^{-1}.$$

(2) Zeigen Sie: Für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $AB = BA$ gilt
$$(A+B)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} A^i B^{m-i}.$$
Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Vertauschbarkeitsannahme im Allgemeinen notwendig ist.

(3) Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$
Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und Matrizen $D, N \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$, wobei D diagonal und N nilpotent ist und $DN = ND$, derart, dass
$$A = S(D+N)S^{-1}.$$
Berechnen Sie – ohne die Hilfe eines Computers – die Matrix A^{50}.

Aufgabe 3. Seien
$$V := \{g \in \mathbb{C}[X] \mid \deg(g) < n\}$$
der n-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen Polynome vom Grad kleiner als n und $f \in \mathrm{End}(V)$ der Endomorphismus
$$f : V \to V, \quad g(X) \mapsto g(X+1).$$

(1) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und -räume von f. Folgern sie, dass $\chi_f(X) = (X-1)^n$ das charakteristische Polynom von f ist und mit dem Minimalpolynom $\mu_f(X)$ übereinstimmt. Folgern Sie, dass V zyklisch bezüglich f ist. Finden Sie einen f-zyklischen Vektor $v \in V$?

(2) Ist f bezüglich einer geeigneten Basis von V durch eine Matrix in Jordanscher Normalform darstellbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine solche Matrix.