Vorlesung am 8.1.2013

Beispiel: Man berechne die Eigenwerte und die Haupträume der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -7 & 6 & -9 \\ 4 & 7 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

. Hier fassen wir die Matrix als lineare Abbildung auf: $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

Wir betrachten die Vektoren $e_1, Ae_1, A^2e_1, \ldots$. Der Vektor Ae_1 ist die erste Spalte von A. Wir definieren $U := \mathcal{L}(e_1, Ae_1, A^2e_1, \ldots)$. Dies ist ein invarianter Unterraum.

Man findet:

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^2e_1 = A(Ae_1) = \begin{pmatrix} -39 \\ 24 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Man hat die Relation

$$A^2e_1 - 6Ae_1 = -9e_1. \tag{1}$$

Also gilt $A^2e_1 \in \mathcal{L}(e_1, Ae_1)$ und dann $U = \mathcal{L}(e_1, Ae_1)$. Wir sehen, dass $\dim U = 2$.

Wir betrachten das Polynom

$$P(T) = T^2 - 6T + 9.$$

Es gilt $P(A)|_U = 0$. Die Nullstellen von $p(T)$ sind genau die Eigenwerte der linearen Abbildung $A|_U : U \to U$. Die einzige Nullstelle ist 3:

$$P(T) = T^2 - 6T + 9 = (T-3)^2.$$

Daraus sieht man, dass $(A - 3E_4)e_1 \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist, denn es gilt

$$(A - 3E_4)((A - 3E_4)e_1) = ((A - 3E_4)(A - 3E_4))e_1 = P(A)e_1 = 0.$$

Wir können diesen Eigenvektor bequem berechnen:

$$(A - 3E_4)e_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$f = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da $4f = (A - 3E_4)e_1$, ist auch $f \in U$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3. Die Vektoren e_1 und f bilden eine Basis von U. Wir haben die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} Ae_1 = 3e_1 + (Ae_1 - 3e_1) & = 3e_1 + 4f \\ Af = & 3f \end{array}$$

Also lautet die Matrix von $A|_U$ in der Basis e_1, f:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

An dieser Matrix sieht man, dass der Endomorphismus $A_{|U} - 3\,\mathrm{id}_U : U \to U$ nilpotent ist. Deshalb gilt $U(3) = U$, wobei $U(3)$ den Hauptraum zum Eigenwert 3 von $A_{|U}$ bezeichnet.

Um weitere Eigenwerte zu finden benutzen wir Faktorräume. Wir setzen $V = \mathbb{R}^4$. Es gibt eine surjektive lineare Abbildung $\alpha : V \to W$, deren Kern gerade U ist. Man nennt W, α einen Faktorraum von V modulo U. Wir haben also eine kurze exakte Sequenz

$$U \to V \overset{\alpha}{\to} W.$$

Man sieht leicht, dass $U = \mathcal{L}(e_1, e_2 + e_4)$. Der Vektorraum $\mathcal{L}(e_2, e_3)$ ist ein Komplementärraum zu U in V. Also ist $\alpha(e_2), \alpha(e_3)$ eine Basis von W. Wenn $v \in V$ ist, so verabreden wir die Schreibweise $\alpha(v) = \overline{v}$. Da $A(U) \subset U$ ist, finden wir eine lineare Abbildung $\beta : W \to W$, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & W \\ {\scriptstyle A}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \beta} \\ V & \xrightarrow{\alpha} & W. \end{array}$$

In dem Vektorraum W gelten die Gleichungen $0 = \alpha(e_1) = \overline{e}_1$, und $0 = \alpha(e_2 + e_4) = \overline{e}_2 + \overline{e}_4$. Ausgehend davon können wir die Matrix B von β in der Basis $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ ausrechnen:

$$\beta(\overline{e}_2) = \alpha(Ae_2) = \alpha(-7e_1 + 7e_2 - e_3 + 4e_4) = -7\overline{e}_1 + 7\overline{e}_2 - \overline{e}_3 + 4\overline{e}_4 = 3\overline{e}_2 - \overline{e}_3$$

$$\beta(\overline{e}_3) = \alpha(Ae_3) = 6\overline{e}_1 + 7\overline{e}_2 + \overline{e}_3 + 6\overline{e}_4 = 7\overline{e}_2 + \overline{e}_3 - 6\overline{e}_2 = \overline{e}_2 + \overline{e}_3.$$

Für die Matrix B gilt dann

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

In dem Koordinatensystem $\mathbb{R}^2 \cong W$, welches durch die Basis $\overline{e}_2, \overline{e}_3$ definiert wird gilt:

$$\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man berechnet

$$\beta(\overline{e}_2) = B\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B^2\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Man erhält leicht die Relation $B^2\overline{e}_2 - 4B\overline{e}_2 + 4\overline{e}_2 = 0$. Wenn $Q(T) = T^2 - 4T + 4$, so gilt also $Q(B)\overline{e}_2 = 0$. Daraus folgt $Q(B)(B\overline{e}_2) = B(Q(B)\overline{e}_2) = 0$. Wir sehen, dass $Q(B) : W \to W$ null ist, weil $\overline{e}_2$ und $B\overline{e}_2$ den Vektorraum W erzeugen.

Das Polynom $Q(T)$ hat nur die Nullstelle 2 und es gilt $Q(T) = (T-2)^2$. Also ist $W = W(2)$, denn $Q(B) = (B - 2E_2)^2 = 0$.

Wir erhalten nach Satz 38 die kurze exakte Sequenz

$$U(2) \longrightarrow V(2) \longrightarrow W(2).$$

Da 2 kein Eigenwert von $A_{|U}$ ist, gilt $U(2) = 0$. Also ist die Einschränkung $\alpha' : V(2) \to W(2) = W$ des Homomorphismus α ein Isomorphismus. In der Basis $f_2 := (\alpha')^{-1}\overline{e}_2, f_3 := (\alpha')^{-1}\overline{e}_3$ hat dann die Einschränkung $A_{|V(2)}$ die Matrix (3).

Andererseits haben wir auch die exakte Sequenz

$$U(3) \longrightarrow V(3) \longrightarrow W(3).$$

Da 3 kein Eigenwert von β ist, folgt $W(3) = 0$. Daher ist die Inklusion $U = U(3) \to V(3)$ ebenfalls ein Isomorphismus.

Für die Dimensionen gilt

$$\dim V(2) = \dim W = 2, \quad \dim V(3) = \dim U = 2.$$

Im allgemeinen haben wir nach Satz 31 eine Zerlegung $V = V(3) \oplus V(2) \oplus R$. Dabei ist $R \subset V$ ein A-invarianter Unterraum, so dass $A_{|R}$ nicht den Eigenwert 2 und auch nicht den Eigenwert 3 hat. Wegen $\dim V = 4 = 2 + 2 = \dim V(3) + \dim V(2)$, muss R der Nullraum sein. Wir finden:

$$V = V(3) \oplus V(2).$$

Wenn wir die Matrix des Homomorphismus $A : V \to V$ in der Basis e_1, f, f_2, f_3 berechnen so bekommen wir:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(vgl. (2) (3). Die Vektoren f_2 und f_3 haben wir nicht konkret ausgerechnet, sie ergaben sich aus dem Isomorphismus α'.

Man kann die Matrix noch vereinfachen, in dem man die Basis f_2, f_3 von $V(2)$ abändert. Dazu benutzen wir nocheinmal den Isomorphismus α'. Wir haben nach Definition (von β) ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V(2) & \xrightarrow{\alpha'} & W \\ {\scriptstyle A_{|V(2)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ V(2) & \xrightarrow{\alpha'} & W \end{array}$$

Wir suchen eine Basis von W in der die Matrix von β eine Dreiecksmatrix ist. Wir rechnen wieder in dem Koordinatensystem auf W, das durch die Basis $\overline{e}_2, \overline{e}_3$ definiert wird. Dann ist β durch die Matrix B gegeben.

Wir setzen $w = B\overline{e}_2 - 2\overline{e}_2$. Dann folgt

$$(B - 2E_2)w = (B - 2E_2)^2\overline{e}_2 = Q(B)\overline{e}_2 = 0.$$

Wir berechnen die Matrix von B in der Basis $\overline{e}_2, w$:

$$\begin{array}{lccccc} B\overline{e}_2 = & 2\overline{e}_2 + (B - 2E_2)\overline{e}_2 & = & 2\overline{e}_2 & + & w \\ Bw = & & & & & 2w \end{array}$$

Als Matrix bekommen wir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es sei $u \in V(2)$ das Urbild von w bei dem Isomorphismus $\alpha' : V(2) \to W$. Dann ist die Matrix des Endomorphismus A in der Basis e_1, f, f_2, u:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese Marix ist also ähnlich zur Matrix A.