Drehungen des $\mathbb{R}^3$ und die stereographische Projektion Vorlesung am 27.6.2013

Es sei

$$S^2 = \{\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Es sei $M\mathbb{R}^3$ der Untervektorraum, der durch $x_3 = 0$ definiert wird. Es sei $\underline{n} = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Für einen Punkt $\underline{x} \in S^2$, wo $\underline{x} \neq \underline{n}$ definiert man $\pi(\underline{x})$ als den Durchschnitt der affinen Geraden $(1-t)\underline{n} + t\underline{x}$, $t \in \mathbb{R}$ mit M. Es gilt

$$\pi(\underline{x}) = \frac{1}{1-x_3}(x_1, x_2).$$

$\pi : S^2 \setminus \{\underline{n}\} \to M$ heißt stereographische Projektion.

Wir fassen die Punkte von M als komplexe Zahlen auf $\xi = x_1 + \mathbf{i}x_2 \in \mathbb{C}$. In diesem Sinne schreiben wir einen Punkt von $\mathbb{R}^3$ in der Form (ξ, x_3). Zu der Menge $\mathbb{C}$ fügen wir ein weiteres Element hinzu, dass ∞ heißt. Dann schreiben wir die streographische Projektion

$$\pi : S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad \pi(\underline{x}) = \tfrac{\xi}{1-x_3}, \text{ wo } x_3 \neq 1, \quad \pi(\underline{n}) = \infty. \tag{1}$$

Diese Abbildung ist eine Bijektion.

Man findet für die Umkehrabbildung ρ die folgende Formel. Es sei $z \in \mathbb{C}$ und $(\xi, x_3) = \pi^{-1}(z)$. Dann gilt:

$$\xi = \frac{2z}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}. \tag{2}$$

Wir bezeichen mit $\mathbb{P}$, die Menge aller eindimensionalen Unterräume des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^2$. Man nennt $\mathbb{P}$ die projektive Gerade über dem Körper $\mathbb{C}$.

Wir bezeichnen den eindimensionalen Unterraum von $\mathbb{C}^2$, der von dem Vektor

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

erzeugt wird mit $(z_1 : z_2)$. Wenn $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, so gilt

$$(z_1 : z_2) = (\lambda z_1 : \lambda z_2).$$

Mit den Bezeichungen von (2) gilt beispielsweise, wenn $x_3 \neq \pm 1$

$$(z:1) = (\xi : (1-x_3)) = (\xi\bar{\xi} : (1-x_3)\bar{\xi}) = ((1+x_3) : \bar{\xi}).$$

Wir definieren die Bijektion $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{P}$ durch $z \mapsto (z:1)$ und $\infty \mapsto (1:0)$.

Die Umkehrabbildung zur streographischen Projektion gibt uns dann

$$\rho : \mathbb{P} \to S^2. \tag{3}$$

Das Bild $\rho((z_1 : z_2)) = (\xi, x_3) \in S^2$ ist durch die folgende Formel gegeben:

$$\xi = \frac{2z_1\bar{z}_2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}, \quad x_3 = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}. \tag{4}$$

Hier bezeichnet $\bar{z}_2$ die zu z_2 komplex konjugierte Zahl. In dieser Formel spielt der Punkt ∞ keine Sonderrolle mehr.

Für zwei komplexe Zahlen α, β, so dass $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ betrachten wir die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}).$$

Alle diese Matrizen bilden eine Untergruppe $SU_2 \subset GL_2(\mathbb{C})$.

Wir betrachte auf $\mathbb{C}^2$ die hermitesche Form $H(\underline{v}, \underline{w}) = {}^t\underline{\bar{v}}\underline{w}$. Dann gilt für $U \in SU_2$:

$$H(U(\underline{v}), U(\underline{w})) = H(\underline{v}, \underline{w}).$$

Es sei $L \subset \mathbb{C}^2$ ein eindimensionaler Unterraum, d.h. $L \in \mathbb{P}^1$. Wir bezeichnen mit $U(L)$ sein Bild bei der linearen Abbildungen $U : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Die Abbildung $\hat{U} : L \mapsto U(L)$ ist ein Automorphismus (=Permutation) der Menge $\mathbb{P}^1$. Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus

$$SU_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}).$$

Statt von einem Gruppenhomomorphismus spricht man auch von einer Operation von SU_2 auf $\mathbb{P}$.

Wegen der Bijektion ρ (3) erhalten wir auch eine Operation von SU_2 auf S^2:

$$SU_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{S}^{\not\vDash}), \quad U \mapsto T. \tag{5}$$

Dabei ist T durch die Kommutativität des folgenden Diagramms von Mengen definiert.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{P} & \xrightarrow{\rho} & S^2 \\
{\scriptstyle \hat{U}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle T} \\
\mathbb{P} & \xrightarrow{\rho} & S^2
\end{array}
\tag{6}
$$

Lemma 1 *Es gibt eine lineare Abbildung $\tilde{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, deren Einschränkung auf S^2 gleich T ist.*

Wir werden das beweisen, indem wir T explizit ausrechen. Insbesondere gilt dann für einen Vektor $\underline{x} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, dass $\tilde{T}(\underline{x}) \in S^2$. Also hat man die Implikation

$$|\underline{x}| = 1 \quad \Rightarrow \quad |\tilde{T}(\underline{x})| = 1.$$

Daraus folgt, dass die Matrix $\tilde{T}$ orthogonal sein muss: ${}^t\tilde{T}T = E_3$.

Zur Berechnung von T nehemen wir einen beliebigen Punkt $(\xi, x_3) \in S^2$. Seine Position im Diagramm (6) sei die rechte obere Ecke. Es gilt $\rho((\xi : (1 - x_3)))$, wie man aus (1) erkennt. Das Bild $(z'_1 : z'_2)$ von $(\xi, (1 - x_3))$ bei U ergibt sich durch Matrixmultiplikation mit U:

$$
\begin{aligned}
z'_1 &= \alpha\xi + \beta(1 - x_3) \\
z'_2 &= -\bar{\beta}\xi + \bar{\alpha}(1 - x_3)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Wir setzen $(\xi', x'_3) = T(\xi, x_3)$. Wegen der Kommutativität des Diagramms (6) gilt $(\xi', x'_3) = \rho(z'_1, z'_2)$. Wir berechnen das mit (4). Wir betrachten die Vektoren:

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} \xi \\ 1 - x_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{z}' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. } \underline{z}' = U\underline{z}.$$

$$2(1-x_3) = x_1^2 + x_2^2 + (1-x_3)^2 = H(\underline{z}, \underline{z}) = H(U\underline{z}, U\underline{z}) = H(\underline{z}', \underline{z}') = |z'_1|^2 + |z'_2|^2.$$

Deshalb sieht die Formel (4) für $(z'_1 : z'_2)$ so aus:

$$\xi' = \frac{z'_1 \bar{z}'_2}{1 - x_3}, \quad x'_3 = 1 - \frac{|z'_2|^2}{(1 - x_3)}. \tag{8}$$

Wegen (7) können wir die letzte Gleichung schreiben:

$$
\begin{aligned}
x_3' &= 1 - \tfrac{1}{(1-x_3)}(\bar{\alpha}(1-x_3) - \bar{\beta}\xi)(\alpha(1-x_3) - \beta\bar{\xi}) \\
&= 1 - \tfrac{1}{(1-x_3)}(\bar{\alpha}\alpha(1-x_3)^2 - \bar{\beta}\alpha\xi(1-x_3) - \beta\bar{\alpha}\bar{\xi}(1-x_3) + \beta\bar{\beta}\xi\bar{\xi} \\
&= 1 - \tfrac{1}{(1-x_3)}(|\alpha|^2(1-x_3) - \bar{\beta}\alpha\xi - \beta\bar{\alpha}\bar{\xi} + |\beta|^2(1+x_3)) \\
&= 2\mathcal{R}(\bar{\beta}\alpha)x_1 - 2\mathcal{I}(\bar{\beta}\alpha)x_2 + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)x_3.
\end{aligned}
$$

Hier bezeichnen $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{I}$ den Realteil bzw. den Imaginärteil einer komplexen Zahl.

Die erste Gleichung von (8) können wir schreiben:

$$
\begin{aligned}
\xi' &= \tfrac{1}{(1-x_3)}(\alpha\xi + \beta(1-x_3))(-\beta\bar{\xi} + \alpha(1-x_3)) \\
&= \tfrac{1}{(1-x_3)}(\alpha^2\xi(1-x_3) - \beta^2\bar{\xi}(1-x_3) - \alpha\beta\xi\bar{\xi} + \alpha\beta(1-x_3)^2) \\
&= \alpha^2\xi - \beta^2\bar{\xi} - 2\alpha\beta x_3.
\end{aligned}
$$

Wir sehen, dass jeweils die letzten Ausdrücke für x_3' und ξ' linear in x_1, x_2, x_3. Damit ist das Lemma bewiesen. *Q.E.D.*

Wir bezeichnen Real- und Imaginärteile der komplexen Zahlen α, β und ξ' so:

$$\alpha = p + \mathbf{i}q, \quad \beta = s + \mathbf{i}t, \quad \xi' = x_1' + \mathbf{i}x_2'.$$

Dann bekommen die Gleichungen für x_3 und ξ' die folgenden Form:

$$
\begin{array}{rcrrr}
x_1' & = & (p^2 - q^2 - s^2 + t^2)x_1 & -2(pq + st)x_2 & +2(qt - ps)x_3 \\
x_2' & = & 2(pq - st)x_1 & +(p^2 - q^2 + s^2 - t^2)x_2 & -2(pt + qs)x_3 \\
x_3' & = & 2(ps + tq)x_1 & +(pt - qs)x_2 & +(p^2 + q^2 - s^2 - t^2)x_3
\end{array}
$$

Das ist die lineare Transformation $\tilde{T}$. Wir wissen schon, dass die Matrix der Koeffizienten orthogonal ist. Man kann $\det \tilde{T} = 1$ nachprüfen, z.B. indem man die Matrix mit der Eulerschen Drehmatrix vergleicht. (siehe Skript)

Daraus ergibt sich, dass der Gruppehomomorphismus (5) über einen Isomorphismus von Gruppen

$$SU_2 \to SO_3$$

faktorisiert. Hier ist $SO_3 = \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid \ {}^tAA = E_3, \ \det A = 1\}$.