LA-Klausur 25.7.13, Aufgabe 1

1) Man betrachte den Endomorphimus des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4$, dessen Matrix in der Standardbasis wie folgt aussieht:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & -1 \\ 2 & 13 & -4 & -1 \\ 4 & 23 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die Eigenwerte dieses Endomorphismus und die Dimension der Haupträume. (siehe Vorlesung am 8.1.2013).

Lösung: Wir bezeichnen die Matrix mit A. Wir setzen $V = \mathbb{R}^4$ und sehen A als Endomorphismus von V an. Man berechnet:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ae_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 e_1 = \begin{pmatrix} 49 \\ 28 \\ 28 \\ 56 \end{pmatrix}.$$

Man findet die Gleichung: $A^2 e_1 - 14Ae_1 + 49e_1 = 0$. Das Polynom $T^2 - 14T + 49 = (T-7)^2$ hat als einzige Nullstelle 7. Also gilt: $(A - 7E_4)^2 e_1 = 0$. Der Unterraum $W = \mathcal{L}(e_1, Ae_1)$ ist A-invariant. Der Hauptraum $W(7)$ ist gleich W, da $(A - 7E_4)^2(W) = 0$.

Es sei U ein Faktorraum

$$0 \to W \to V \xrightarrow{\pi} U \to 0.$$

Wir setzen $\pi(e_i) = \bar{e}_i \in U$. Dann gilt

$$\bar{e}_1 = 0, \quad 7\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + 4\bar{e}_4 = 0, \text{ und also } \quad \bar{e}_2 = -\bar{e}_3 - 2\bar{e}_4.$$

Wir sehen, dass $\bar{e}_3, \bar{e}_4$ eine Basis von U ist.

$A : V \to V$ induziert eine Abbildung $\beta : U \to U$. Wir berechnen die Matrix von β bzgl. der Basis $\bar{e}_3, \bar{e}_4$. Aus den letzten beiden Spalten von A ergibt sich:

$$\beta(\bar{e}_3) = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 4\bar{e}_3 + 5\bar{e}_4 = -5\bar{e}_3 + 3\bar{e}_4.$$

$$\beta(\bar{e}_4) = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3 - 7\bar{e}_4 = -5\bar{e}_4.$$

Daraus ergibt sich die Matrix von β:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Da das eine Dreiecksmatrix ist folgt $U(-5) = U$. Nach der Vorlesung hat man die kurzen exakten Sequenzen von Haupträumen:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 \to & W(-5) & \to & V(-5) & \to & U(-5) & \to 0, \\ 0 \to & W(7) & \to & V(7) & \to & U(7) & \to 0. \end{array}$$

Es folgt $\dim V(7) = \dim W(7) = \dim W = 2$ und $\dim V(-5) = \dim U(-5) = \dim U = 2$. Also hat A nur die Eigenwert -5 und 7 und die zugehörigen Haupträume haben jeweils die Dimension 2.