LA-Klausur 25.7.2013, Aufgabe 3

3) Es sei V ein orientierter euklidischer Vektrorraum der Dimension 3. Wie ist das Vektorprodukt $v_1 \times v_2$ zweier Vektoren $v_1, v_2 \in V$ definiert?

Es sei $\phi : V \to V$ eine Drehung. Man beweise, dass

$$\phi(v_1) \times \phi(v_2) = \phi(v_1 \times v_2),$$

für alle Vektoren $v_1, v_2 \in V$.

Lösung: Es gibt genau eine Determinantenfunktion $\det \in \mathrm{Alt}^3(V)$, so dass für jede positiv orientierte orthonormale Basis u_1, u_2, u_3 von V gilt: $\det(u_1, u_2, u_3) = 1$. Das Vektorprodukt von $v_1, v_2 \in V$ ist definiert durch

$$< w, v_1 \times v_2 >= \det(w, v_1, v_2), \quad \text{für alle } w \in V.$$

Man weiß (oder findet aus der Definition), dass $v_1 \times v_2 = -v_2 \times v_1$ und dass

$$u_1 \times u_2 = u_3, \quad u_2 \times u_3 = u_1, \quad u_3 \times u_1 = u_2. \tag{1}$$

Wir definieren zwei bilineare Abbildungen

$$L, R : V \times V \to V.$$

$L(v_1, v_2) = \phi(v_1) \times \phi(v_2)$ und $R(v_1, v_2) = \phi(v_1 \times v_2)$. Wir müssen $L = R$ beweisen. Nach einem Hauptsatz (Satz 64 der neuen Version) der Vorlesung, genügt es $L(v_1, v_2) = R(v_1, v_2)$ für $v_1, v_2 \in \{u_1, u_2, u_3\}$ zu beweisen.

Weil ϕ eine Drehung ist, sind die Bilder $\phi(u_1), \phi(u_2), \phi(u_3)$ ebenfalls eine positiv orientierte orthonormale Basis. Also gilt:

$$\phi(u_1) \times \phi(u_2) = \phi(u_3), \quad \phi(u_2) \times \phi(u_3) = \phi(u_1), \quad \phi(u_3) \times \phi(u_1) = \phi(u_2).$$

Durch Vergleich mit (1) folgt die Behauptung.