Musterlösung

6) Wir betrachten auf dem Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die symmetrische Bilinearform:

$$B(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t\underline{x} \begin{pmatrix} 13 & 7 & 7 \\ 7 & 13 & 7 \\ 7 & 7 & 13 \end{pmatrix} \underline{y}, \quad \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Man finde eine orthonormale Basis des Euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^3$, in der die Gramsche Matrix von B Diagonalform hat.

Lösung: Wir schreiben $< \underline{x}, \underline{y} >= {}^t\underline{x}\underline{y}$ für das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Wenn man sagt, dass $\mathbb{R}^3$ ein euklidischer Vektorraum ist, so ist das bezüglich dieses Skalarprodukts gemeint. Wenn $U \subset \mathbb{R}^3$, so bezeichnet im folgenden $U^\perp$ das orthogonale Komplement von U bezüglich des Standardskalarprodukts (und nicht! bezüglich B).

Die Matrix in der Aufgabe können wir auch als einen Endomorphismus $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auffassen. Dann lautet die Gleichung in der Aufgabe

$$B(\underline{x}, \underline{y}) =< \underline{x}, \alpha(\underline{y}) > .$$

Man sucht eine orthonormale Basis v_1, v_2, v_3 des euklidischen Vektoraums $\mathbb{R}^3$, so dass jeder Vektor v_i ein Eigenvektor von α ist. Dann gilt automatisch $B(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$. (vgl. Lemma 103 und sein Korollar.)

Der Endomorphismus α hat den Eigenwert 6, denn

$$\begin{pmatrix} 13-6 & 7 & 7 \\ 7 & 13-6 & 7 \\ 7 & 7 & 13-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

ist eine Matrix vom Rang 1. Der Eigenraum $V_6 \subset \mathbb{R}^3$ hat folglich die Dimension 2. Man findet eine Basis von V_6:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Orthogonalisierungverfahren findet man eine orthogonale Basis von

V_6 von der Form $v'_1 = w_1, v'_2 = w_2 + \lambda v'_1$. Die Zahl λ bestimmt man aus der Gleichung:

$$0 =< v'_1, v'_2 >=< w_1, w_2 > +\lambda < w_1, w_1 >= -1 + \lambda \cdot 2.$$

Es ergibt sich:

$$v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nach ist Lemma $V_6^\perp$ ein α-invarianter Unterraum. Es gilt $\dim V_6^\perp = 1$ (Satz 88 neu). Es sei v_3' eine Basis von $V_6^\perp$. Dann muss v_3' ein Eigenvektor von α sein.

Um v_3' zu finden, kann man z.B. das Orthogonalisierungsverfahren auf die Vektoren v_1', v_2', u, wobei u eine beliebige Ergänzung zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ist (z.B. $u = e_3$). Das liefert eine orthogonale Basis v_1', v_2', v_3'. Man macht den Ansatz

$$v_3' = e_3 + \varkappa v_1' + \mu v_2'.$$

Die Zahlen $\varkappa$ und μ findet man aus den Gleichungen:

$$0 =< v_1', v_3' >=< v_1', e_3 > +\varkappa < v_1', v_1' > \quad 0 =< v_2', v_3' >=< v_2', e_3 > +\mu < v_2', v_2' > .$$

Man erhält $\varkappa = 0$ und $\mu = 2/3$. Dann folgt

$$v_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2/3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Wenn man will kann man direkt überprüfen, dass v_3' ein Eigenvektor von α ist.

Die gesuchte orthonormale Basis ist dann:

$$\frac{v_1'}{|v_1'|}, \frac{v_2'}{|v_2'|}, \frac{v_3'}{|v_3'|}.$$

Bemerkung: Man kann auch einen Vektor v_3', der zu v_1' und v_2' orthogonal ist, finden indem man das Vektorprodukt benutzt:

$$v_3' = v_1' \times v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$