Lineare Algebra, Klausur am 7.2.2013

1) Es sei $\pi : V \to V$ ein Homomorphismus eines Vektorraums V in sich, so dass $\pi \circ \pi = \pi$. Beweisen Sie, dass die Unteräume $\operatorname{Im} \pi$ und $\operatorname{Ker} \pi$ von V komplementär sind.

2) Es sei K eine Körper. Es seien $A, B \in M(n \times n, K)$ zwei Matrizen, so dass $AB = E_n$. Man beweise, dass $BA = E_n$.

3) Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten Vektorraums, so dass f kein Isomorphismus ist. Man beweise, dass es eine Basis von V gibt, in der die letzte Zeile der Matrix von f aus Nullen besteht.

4) Man betrachte die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -16 & 5 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Man finde ein Polynom $P(T)$, so dass $P(A) = 0$. Was sind die Eigenwerte der Matrix A?

5) Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphimus eines endlich erzeugten Vektorraums. Was versteht man unter der Fittingzerlegung von f?

6) Die folgende Matrix ist nilpotent:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Wir betrachten $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ als lineare Abbildung.

Man finde eine Basis für jeden der folgenden Vektorräume:

$$\mathbb{R}^3 \supset \operatorname{Im} A \supset \operatorname{Im} A^2 \supset \{0\}.$$

Man gebe eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ an, in der A eine obere Dreiecksmatrix ist.

7) Man finde eine nichttriviale Relation zwischen den folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$