Lineare Algebra, Klausur am 5.4.2013

1) Man betrachte folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}),$$

als Endomorphismus des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Man bestimme die Eigenwerte und die Haupträume von A.

2) Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraumes. Es sei m eine natürlich Zahl, so dass gilt

$$\operatorname{Ker} f^m = \operatorname{Ker} f^{m+1}.$$

Man beweise, dass

$$\operatorname{Ker} f^{m+1} = \operatorname{Ker} f^{m+2}.$$

3) Man bestimme den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Es sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. Es seien W_1, W_2 komplementäre Unterräume. Dann gibt es genau einen Endomorphismus $f : V \to V$, so dass für alle $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ gilt:

$$f(w_1) = w_1, \quad f(w_2) = 0.$$

Was ist die Spur des Endomorphismus f?

5) Es sei $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Folge von linear unabhängigen Vektoren in einem Vektorraum V. Es sei $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$ ihre lineare Hülle. Es sei $x \notin \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$.

Man beweise, dass die Vektoren $x, v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

6) Die folgende Matrix ist nilpotent.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Man finde eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Matrix der linearen Abbildung A eine obere Dreiecksmatrix ist.

7) Es sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. Es seien U und W zwei Unterräume von V, so dass

$$\dim U + \dim W > \dim V.$$

Man beweise, dass es in $U \cap W$ einen von 0 verschiedenen Vektor gibt.