Lineare Algebra, Übungsklausur

1) Es sei

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Es sei $P(T) = (T-1)(T-2)$. Wir setzen als bekannt voraus, dass $P(B) = 0$.

Die Matrix B definiert einen Endomorphismus $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Man gebe eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, in der die Matrix dieses Endomorphismus eine Diagonalmatrix ist. Man finde eine invertierbare Matrix $C \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, so dass

$$C^{-1}BC$$

eine Diagonalmatrix ist.

2) Es sei V ein Vektorraum. Es seien $U \subset W \subset V$ Unteräume. Es sei $C \subset V$ ein Komplementärraum zu U in V.

Man beweise, dass die Unterräume U und $C \cap W$ komplementäre Unterräume des Vektorraums W sind.

3) Man betrachte in $\mathbb{R}^4$ die Vektoren:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \; w_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} \; w_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Man finde eine Basis für den Vektorraum der Relationen.

4) Es sei $f : V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines endlich erzeugten Vektorraums. Dann gibt es nach Definition eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und Elemente $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in K$, so dass $f(v_i) = \lambda_i v_i$ für $i \in [1, n]$.

Es sei $U \subset V$ ein Unterraum von V. Man beweise, dass es einen Komplementärraum W von U gibt, so dass $f(W) \subset W$.

5) Es sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus von Vektorräumen. Es seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Wir nehmen an, dass die Vektoren $f(v_1), \ldots, f(v_n) \in W$ linear unabhängig sind.

Man beweise, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabahängig sind.

6) Es sei $\Delta \in M(n \times n, K)$ eine obere Dreiecksmatrix. Die Einträge auf der Diagonalen seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Es sei

$$P(T) = \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i).$$

Man beweise, dass $P(\Delta) = 0$. (Man betrachte einen Faktorraum von K^n modulo $\mathcal{L}(e_1)$.)

7) Es seien W_1 und W_2 zwei Unterräume eines endlich erzeugten Vektorraums V, so dass

$$\dim W_1 = \dim W_2.$$

Wir nehmen an, dass W_1 und W_2 von V verschieden sind. Man beweise, dass es einen Vektor $v \in V$ gibt, der weder in W_1 noch in W_2 liegt.

Man folgere weiter, dass es einen Unterraum $U \subset V$ gibt, der sowohl zu W_1 als auch zu W_2 komplementär ist.