Musterlösung

4) Man finde die Sylvestersche Normalform der folgenden symmetrischen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Lösung: Es sei $C \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ eine beliebige invertierbare Matrix. Dann haben die Matrizen $A' = {}^tCAC$ und A die gleiche Sylvestersche Normalform.

Man wählt für C eine elementare Matrix. Dann ist die Multiplikation mit C von rechts dasgleiche wie eine Spaltenscherung. Entsprechend ist die Multiplikation von links mit ${}^tC$ eine Zeilenscherung. Wendet man daher eine simultane Zeilen- und Spaltenscherung auf A an, so erhält man eine Matrix A' mit der gleichen Sylvesterschen Normalform (vgl. Übung 23 Aufgabe 2). Durch eine mehrmalige Anwendung von simultanen Zeilen- und Spaltenscherungen erhält man eine Diagonalmatrix aus der man die Sylvestersche Normalform ablesen kann.

Warnung: Die Matrizen A und A' haben im allgemeinen verschiedene Eigenwerte. Deshalb sind simultane Zeilen- und Spaltenscherungen nicht geeignet, um eine Matrix auf Hauptachse zu bringen (Skript neu, Satz 105).

Man wendet auf A die folgende simultane Zeilen- und Spaltenscherung an. Man zieht von der 3.Spalte die 2.Spalte ab. Dann hat man eine Matrix $\tilde{A}$. Dann zieht man von der 3.Zeile von $\tilde{A}$ die 2.Zeile ab und erhält die Matrix A':

$$\begin{array}{cccc} & & -S_2 & \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}, \qquad \tilde{A} = \begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 0 & 3 & \\ 2 & 1 & 0 & 2 & \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -Z_2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & \end{array}, \qquad A' = \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

$-S_2$ unter der 3. Spalte heisst, dass man von dieser Spalte die zweite Spalte abziehen muss. Die analoge Bedeutung hat $-Z_2$ neben der 3.Zeile. Man macht mit A' weiter.

$$\begin{array}{cccc} & & & -S_1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 0 & 0 & \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 3 & 2 & 0 & -3 & -Z_1 \end{array}, \qquad \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} -2S_2 & & & \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccccc} -1 & 2 & 0 & 0 & -2Z_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \end{array}, \qquad \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}$$

Die letzte Matrix hat die Sylvestersche Normalform

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}.$$

Das ist dann auch die Sylvestersche Normalform von A.