Topologie

Lecture Oct. 15, 2013

Proposition 0.1 *Let M be a countable (abzählbar) set. Then the set of all finite sequences of elements of M is countable.*

Proposition 0.2 *Let M be an infinite set. Then the power set (Potenzmenge) $\mathfrak{P}(M)$ is uncountable.*

A topological space is a pair $(X, \mathcal{T})$ where X is a set end $\mathcal{T} \in \mathfrak{P}(X)$ is a subset satisfying the open set axioms (Wikipedia). An element of $\mathcal{T}$ is called an open set.

Definition 0.3 *Let $(X, \mathcal{T})$ be a topological space. A base for $\mathcal{T}$ is a subset $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, such that*

For each $x \in U \in \mathcal{T}$ there is a $B \in \mathcal{B}$ such that $x \in B \subset U$.

Example: Open balls $B(x, \epsilon)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ are a base for the open set of $\mathbb{R}^n$ in the usual sense.

If we allow only $x \in \mathbb{Q}^n$ and $\epsilon \in \mathbb{Q}$ we obtain a countable base.

Let X be a set. Let $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ a subset. Then $\mathcal{B}$ is a base for a topology $\mathcal{T}$ iff it has the following properties:

1. For each $x \in X$ there is a $B \in \mathcal{B}$, such that $x \in B$
2. If $x \in B_1 \cap B_2$ with $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ then there is a $B \in \mathcal{B}$ with $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

The non empty sets in $\mathcal{T}$ are exactly the unions of elements in $\mathcal{B}$.

Example 1: Let $X = \mathbb{Q}$. Take for $\mathcal{B}$ all subsets of the form

$$x + p^m\mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{Q},\ m \in \mathbb{N}.$$

This defines the p-adic topology.

Let $(M, \geq)$ be a partially ordered set = Halbordnung (Wikipedia). We say M is filtered if for each two elements $x, y \in M$ there is an $z \in M$, with $z \geq x$, $z \geq y$.

E.g. $(\mathbb{N}, \geq)$ is a filtered set with the usual $\geq$.

Two a filtered set we add a new element $\mathcal{L} \notin M$. We set

$$\bar{M} = M \cup \{\mathcal{L}\}. \tag{1}$$

We define a base $\mathcal{B}$ for a topology on $\bar{M}$ consisting of:

1. All subsets of M regarded as subsets of $\bar{M}$.
2. All subsets of the form $\{m \in M \,|\, m \geq x\} \cup \{\mathcal{L}\}$, where $x \in M$ is any fixed element.

The topological space obtained in this way from the filtered set $(\mathbb{N}, \geq)$ is denoted by $\bar{\mathbb{N}}$.

Let X be a set. Let $\mathcal{P} \subset \mathfrak{P}(X)$ be a subset such that each $x \in X$ is contained in some $P \in \mathcal{P}$. We call $\mathcal{P}$ a prebase.)

We define $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$: $B \in \mathcal{B}$ iff B is an intersecction of finitely many sets which belong to $\mathcal{P}$. Then $\mathcal{B}$ is a base for a topology.

Let M be a set. Assume we are given for each $m \in M$ a topological space X_m. We consider the set

$$X = \prod_{m \in M} X_m.$$

It comes with natural projections $p_m : X \to X_m$. Then we consider the prebase $\mathcal{P}$ for X consisting of the sets $p_m^{-1}(U)$, where $m \in M$ and U is an open subset of X_m. Then $\mathcal{P}$ defines a topology on X. It is called the *product topology.*

Lecture: October 17, 2013

Let X a topological space. A subset $A \subset X$ is called a closed set if $X \setminus A$ is open.

We consider the following property of a subset $T \subset X$

If $x \in X$ is a point such that for each open set U with $x \in U$ the intersection $U \cap T$ is non-empty, then $x \in T$.

A set has this property iff it is closed.

Let $x \in X$. An open set U which contains x is called an open neighborhood of x (Umgebung).

Let $T \subset X$ be an arbitrary subset. The set of all points x which have an open neighborhood U such that $U \cap T = \emptyset$ is clearly an open set C. We call $\bar{T} := X \setminus C$ the *closure* of T. (*Abschluss*)

For a closed set A we have the implication

$$T \subset A \quad \Rightarrow \quad \bar{T} \subset A.$$

Definition 0.4 *Let X, Y be topological spaces. Let $f : Y \to X$ be a map.*

We say that f is continuous (stetig), if for each open subset $U \subset X$ the set $f^{-1}(U)$ is an open subset of Y.

It is equivalent to require that for each closed subset $A \subset X$, the inverse image $f^{-1}(A)$ is a closed subset of Y.

Assume we are given a basis $\mathcal{B}_X$ for X and a basis $\mathcal{B}_Y$ for Y. Then the continuity (Stetigkeit) of f is equivalent with:

For each $y \in Y$ and each $U \in \mathcal{B}_X$ with $f(y) \in U$, there is $V \in \mathcal{B}_Y$ such that $y \in V$ and such that $f(V) \subset U$.

The composite of continuous maps is continuous.

Example: Let X be a topological space. We say that a sequence $x_n \in X$, where $n \in \mathbb{N}$ converges to x, if for each open neighborhood U of x, there exist $n_0 \in \mathbb{N}$, such that $x_n \in U$ for each $n \geq 0$.

We write

$$\lim x_n = x.$$

We define a map (compare (1))

$$\sigma : \bar{\mathbb{N}} \to X$$

by $\sigma(n) = x_n$, $\sigma(\mathcal{L}) = x$.

The assertion that σ is continuous is equivalent with the assertion that x_n converges to x.

Let Y be a topological space and A a closed subset. If we have a convergent sequence $\lim y_n = y$, such that $y_n \in A$. Then $y \in A$ follows. Conversely if the last property holds for a set A and Y has a countable base, the set A is closed.

As a consequence we have: Assume that Y has a countable base. A map $f : Y \to X$ is continuous iff for each convergent sequence $\lim y_n = y$ in Y we have $\lim f(y_n) = f(y)$ in X.

If we allow limits with respect to any filtered set M, we can omit the assumption "countable base" in the last two statements.

Lecture October 22, 2013

Let X be a topological space and let $\mathcal{T}$ be its topology, i.e. the set of open subsets of X.

Let M be a subset of X. The system of all subsets $M \cap U$ of M, where $U \in \mathcal{T}$ is a topology $\mathcal{T}_M$ on M. This is called the induced topology on M.

Example: Consider the subset $M = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$. In the induced topology each subset of M which doesn't contain 0 is open. A subset $V \subset M$ which contains 0 is open iff $M \setminus V$ is a finite set.

Definition 0.5 *A continuous map $f : Y \to X$ of toplogical spaces is called a homoeomorphism, if f is bijective and if for each open set $U \subset Y$ the image $f(U)$ is an open subset of X.*

If f is a homoeomorphism f^{-1} is also a continuous map.

There is an obvious homoeomorphism between the topological space M of the last example an $\bar{\mathbb{N}}$ (see (1)).

Coverings

Let X be a set. A family of subsets $\{M_i\}_{i\in I}$ is called a covering of X if

$$\bigcup_{i\in I} M_i = X.$$

If X is a topological space and all sets M_i are open (resp. closed) we will say that we have an open (resp. closed) covering.

An arbitrary covering $\{M_i\}_{i\in I}$ of X is called locally finite if each point $x \in X$ has an open neighbourhood U, such that $U \cap M_i \neq \emptyset$ for finitely many $i \in I$ only.

Let X be a topological space. Let $\{U_i\}_{i\in I}$ be an open covering.

A subset $T \subset X$ is open (resp. closed) iff for all $i \in I$ the subset $T \cap U_i \subset U_i$ open (resp. closed) in the induced topology on U_i. A map of topological space $f : X \to Y$ is continuous iff the restrictions $f_{|U_i} : U_i \to Y$ are continuous for each i.

Let $\{A_i\}_{i\in I}$ be a locally finite and closed covering of X. A subset $T \subset X$ is closed, iff $T \cap A_i$ is closed for each i. A map of topological space $f : X \to Y$ is continuous iff the restrictions $f_{|A_i} : A_i \to Y$ are continuous for each i.

Proposition 0.6 *(Lindelöf) Assume X has a countable base. Let $\{U_i\}_{i\in I}$ be an open covering of X. Then there is a countable subset $J \subset I$, such that $\{U_j\}_{j\in J}$ is a covering of X too.*

We say that each open covering has a countable subcovering.

Lecture October 24, 2013

Quasicompact topological spaces

Definition 0.7 *A topological space is called quasicompact, if each open covering of X has a finite subcovering.*

Let $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ be the unit interval endowed with the topology induced from $\mathbb{R}$. Then X is quasicompact.

The intervall $Y = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ is not compact. Indeed, consider the covering by all open intervalls with rational endpoints, which do not contain $1/\sqrt{2}$.

A closed subspace A of a quasicompact topological space X is quasicompact.

Theorem 0.8 *(Tychonoff) Let $\{X_i\}_{i\in I}$ be a family of quasicompact topological spaces X_i. Then*

$$\prod_{i\in I} X_i$$

endowed with the product topology is quasicompact.

Let M be a set. We define on the power set $\mathfrak{P}(M)$ a partial order $\geq$ as follows:

$$A \geq B, \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B.$$

A filter of the set M is a filtered subset of $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(M)$ such that $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.

Example: 1.The set $\mathfrak{F}$ of all subsets A of $\mathbb{N}$ whose complements $\mathbb{N} \setminus A$ are finite is a filter of $\mathbb{N}$.

2. Let X a topological space. Fix a point $x \in X$. The set of all open subsets of X which contain x is a filter of the set X. We obtain also a filter if we allow for U only open subsets belonging to a given base $\mathfrak{B}_X$.

Proposition 0.9 *Let X be a topological space. Then X is quasicompact iff for each filter $\mathfrak{F}$ of X:*

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{F}} \bar{A} \neq \emptyset. \tag{2}$$

In the case where X has a countable base it is enough to require (2) for filters $\mathfrak{F}$ which are countable.

Lecture 29.10 13: Proof of Tychonoff's Theorem

Lecture 31.10.13 and 5.11.13

hausdorff.

Proposition 0.10 *A quasicompact subset of a hausdorff topological space X is closed. In particular each point $x \in X$ is closed.*

Definition 0.11 *A topological space X is called compact if it is quasicompact and hausdorff.*

Let $f : X \to Y$ be continuous and assume that Y is hausdorff. Then the graph $\Gamma \subset X \times Y$ of f is a closed subset.

Let $g : X \to Y$ a second continuous map. The set $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ is a closed subset of X.

Let X be quasicompact and Y hausdorff. Let $f : X \to Y$ a continuous map. Then f is closed.

Exercise: A product of hausdorff topological spaces is hausdorff.

The Theorem of Tychonoff implies that a product of compact topological spaces is compact.

Definition 0.12 *A topological space X is called locally compact if it is hausdorff, and each point $x \in X$ has a fundamental system of compact neighbourhoods.*

Lemma 0.13 *Let X be a compact topological space. Let U be an open neighbourhood of a point x. Then there is an open neighbourhood W of x such that $\overline{W} \subset U$.*

This implies that a topological space X is locally compact, if each point has a closed compact neighbourhood. The Lemma holds then more generally for a locally compact X. The following reformulation is useful:

Proposition 0.14 *Let X be locally compact. Let $\cup_{i \in I} U_i = X$ be an open covering. Then there is an open covering $\cup_{j \in J} V_j = X$, such that for each $j \in J$ there is an $i \in I$ such that $\overline{V_j} \subset U_i$.*

Proposition 0.15 *Let $f : X \to Y$ be continuous. We assume that f is closed, and that for each $y \in Y$ the subset $f^{-1}(y)$ is quasicompact.*

Then for each quasicompact subset $Q \subset Y$ the preimage $f^{-1}(Q)$ is quasicompact.

This Proposition has a converse:

Proposition 0.16 *Let X, Y be spaces, such that Y is locally compact.*

Let $f : X \to Y$ be a continuous map, such that the preimage of each compact subset of Y is a quasicompact subset of X.

Then the map f is closed.

7.11.13

Definition 0.17 *Ein abstrakter simplizialer Komplex in eine Menge K und ein System $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(K)$ von endlichen nichtleeren Teilmengen von K, so dass gilt:*

$$\begin{array}{lrcl} 1) & x \in K & \Rightarrow & \{x\} \in \mathfrak{S} \\ 2) & \sigma \in \mathfrak{S} \quad \textit{und} \quad \emptyset \neq \tau \subset \sigma & \Rightarrow & \tau \in \mathfrak{S}. \end{array}$$

Die Elemente von $\mathfrak{S}$ nennt man die Simplexe von K. Wenn $\sharp\sigma = d + 1$, so sagt man σ ist ein Simplex der Dimension d.

Man sagt, dass K lokal endlich ist, wenn jedes $x \in K$ nur in endlich vielen Simplexen enthalten ist.

Es sei $I = [0, 1]$ das Einsintervall. Es sei

$$T = \prod_{x \in K} I.$$

Nach Tychonoff ist das ein kompakter topologischer Raum. Die Elemente von T sind beliebige Funktionen $f : K \to I$.

Definition 0.18 *Es sei $|K| \subset T$ die Teilmenge aller Funktionen $f : K \to I$, so dass*

1. $\operatorname{Supp} f \subset K$ *ist ein Simplex.*
2. $\sum_{x \in K} f(x) = 1$.

Man nennt $|K|$ mit der induzierten Topologie die geometrische Realisierung von K.

Die Menge aller $f \in K$ mit $\operatorname{Supp} f \subset \sigma$ ist eine abgeschlossene und kompakte Teilmenge $|\sigma| \subset |K|$.

Proposition 0.19 *Es sei K ein lokal endlicher abstrakter simplizialer Komplex.*

Dann ist $|K|$ ein lokal kompakter topologischer Raum. Die Überdeckung

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}} |\sigma|$$

ist eine lokal endliche abgeschlossene Überdeckung von $|K|$.

Die Teilmengen $|\sigma| \subset |K|$ sind kompakt und es gilt für alle $\tau \in \mathfrak{S}$:

$$|\sigma \cap \tau| = |\sigma| \cap |\tau|.$$

Hier wird die linke Seite der Gleichung als $\emptyset$ definiert, falls $\sigma \cap \tau = \emptyset$.

Eine Teilmenge $U \subset |K|$ ist genau dann offen, wenn für alle $\sigma \in \mathfrak{S}$ der Durchschnitt $U \cap |\sigma|$ offen in $|\sigma|$ ist.

$|K|$ ist genau dann kompakt, wenn die Menge K endlich ist.

Es sei X ein hausdorffscher topologischer Raum. Es sei K eine lokal endlicher abstrakter simplizialer Komplex und $\mathfrak{S}$ die Menge der Simplexe. Es sei

$$X = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}} A_\sigma$$

eine lokal endliche, abgeschlossene Überdeckung von X, so dass

$$A_\sigma \cap A_\tau = A_{\sigma \cap \tau}. \tag{3}$$

Hierbei definieren wir $A_\emptyset = \emptyset$. Für jedes $\sigma \in \mathfrak{S}$ sei ein Homöomorphismus

$$\phi_\sigma : A_\sigma \to |\sigma|.$$

Wenn $\tau \subset \sigma$, so gilt nach (3) $A_\tau \subset A_\sigma$. Wir fordern, dass die Einschränkung von ϕ_σ auf A_τ gleich ϕ_τ ist:

$$(\phi_\sigma)_{|A_\tau} = \phi_\tau.$$

Wir nennen A_σ, ϕ_σ eine Triangulierung von X.

Die Abbildungen ϕ_σ definieren eine stetige Abbildung:

$$\phi : X \to |K|. \tag{4}$$

so dass $\phi_{|A_\sigma} = \phi_\sigma$. Dann ist ϕ ein Homöomorphismus.

Kürzer aber weniger suggestiv können wir sagen, dass eine Triangulierung von X ein Homöomorphismus $\phi : X \to |K|$ ist.

12.11.2013

Es sei I eine gefilterte Menge. Es sei X_α, wo $\alpha \in I$, eine Familie von topologischen Räumen. Für alle $\beta \geq \alpha$, wo $\beta, \alpha \in I$ sei eine stetige Abbildung $f_{\alpha,\beta} : X_\beta \to X_\alpha$ gegeben, so dass $f_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}_{X_\alpha}$ und so dass für $\gamma \geq \beta \geq \alpha$:

$$f_{\alpha,\beta} \circ f_{\beta,\gamma} = f_{\alpha,\gamma}$$

Man nennt $(X_\alpha, f_{\alpha,\beta})$ ein projektives System zu I. Man definiert den projektiven Limes

$$\varprojlim_I X_\alpha \subset \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \tag{5}$$

als die Teilmenge aller $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, so dass $f_{\alpha,\beta}(x_\beta) = x_\alpha$ für alle $\beta \geq \alpha$.

Man nimmt auf dem projektiven Limes die durch die Produkttopologie induzierte Topologie (5).

Variante: Man auch projektive Systeme nehmen, wo die X_α Mengen sind und die $f_{\alpha,\beta}$ einfach Abbildungen von Mengen.

Wenn alle X_α hausdorff sind, so ist der projektive Limes eine abgeschlossene Teilmenge des Produkts (5).

Proposition 0.20 *Es sei $(X_\alpha, f_{\alpha,\beta})$, wo $\alpha, \beta \in I$ und $\beta \geq \alpha$ ein projektives System topologischer Räume, so dass alle X_α nichtleere kompakte topologische Räume sind.*

Dann ist

$$\lim_{\overleftarrow{I}} X_\alpha$$

ein nichtleerer kompakter topologischer Raum.

Das ist eine Folgerung aus dem Satz von Tychonoff.

Die p-adischen Zahlen:

$$\mathbb{Z}_p = \lim_{\overleftarrow{n\in\mathbb{N}}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

Definition 0.21 *Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

Es seien $U, V \subset X$ zwei offene Teilmengen, so dass $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$. Dann ist $U = X$ oder $V = X$.

In dieser Definition kann man das Wort "offen" durch "abgeschlossen" ersetzen. Äquivalent kann man fordern, dass für eine offene und abgeschlossene Menge $U \subset X$ gilt: $U = \emptyset$ oder $U = X$.

Eine Teilmenge $M \subset X$ eines topologischen Raumes heißt zusammenhängend, wenn sie in der induzierten Topologie zusammenhängend ist. Wenn $M \subset X$ zusammenhängend ist, so auch ihr Abschluss $\overline{M}$.

Wenn $\{M_i\}_{i\in I}$ eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen von X ist, so dass $\cap_{i\in I} M_i \neq \emptyset$, so ist $\cup_{i\in I} M_i$ zusammenhängend.

Es sei $x \in X$. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten, ist eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge $C(x) \subset X$. Man hat die Alternative:

$$C(x) \cap C(y) = \emptyset \quad \text{oder} \quad C(x) = C(y).$$

Eine Menge Teilmenge von X von der Form $C(x)$, $x \in X$ heißt *Zusammenhangskomponente* von X. Die Menge der Zusammenhangskomponenten von X bezeichnet man mit $\pi_0(X)$. Man hat die klassifizierende Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \pi_0(X). \\ x & \mapsto & C(x) \end{array}$$

Proposition 0.22 *Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Es sei $M \subset X$ zusammenhängend. Dann ist $f(M) \subset Y$ zusammenhängend.*

Proposition 0.23 *Ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend.*

Corollary 0.24 *Es sei $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Die topologischen Räume I und $I \times I = I^2$ sind nicht homöomorph.*

Aber die Peanokurve gibt es.

Definition 0.25 *Ein toplogischer Raum heißt lokal zusammenhängend, wenn jeder Punkt ein fundamentales System zusammenhängender Umgebungen besitzt.*

Wenn X lokal zusammenhängend ist, so sind die Mengen $C(x)$ offen. Jede offene Teilmenge U von X ist wieder lokal zusammenhängend. Es sei $x \in U$ und $C_U(x)$ die Zusammenhangskomponente von U, welche x enthält. Dann ist $C_U(x)$ eine offene zusammenhängende Umgebung von x, die in U enthalten ist. Also hat x auch ein fundamentales System von offenen zusammenhängenden Umgebungen.

Die Fundamentalgruppe

Wir bezeichen mit $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ das Einheitsintervall. Es sei X ein topologischer Raum und $X_0 \subset X$ eine Teilmenge.

Definition 0.26 *Es seien $f, g : X \to Y$ zwei stetige Abbildungen in einen topologischen Raum Y, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X_0$.*

Wir nennen f und g homotop relativ zu X_0, wenn eine stetige Abbildung

$$F : X \times I \to Y$$

gibt, so dass

$$\begin{array}{rl} F(x, 0) = f(x),\ F(x, 1) = g(x) & \text{für alle } x \in X \\ F(x, t) = f(x) = g(x), & \text{für alle } x \in X_0, \text{ und } t \in I. \end{array}$$

Man schreibt $f \sim_{X_0} g$. Wenn $X_0 = \emptyset$, so redet man einfach von homotop.

Es sei $\phi : X_0 \to Y$ eine fest gewählte stetige Abbildung. Die Homotopie relativ zu X_0 ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller stetigen Abbildungen $\mathrm{Hom}_{stetig,\phi}(X,Y)$, die auf X_0 mit ϕ übereinstimmen.

Es sei $f \sim_{X_0} g$. Es sei $Y_0 \subset Y$ eine Teilmenge, so dass $f(X_0) = g(X_0) \subset Y_0$. Es seien $f', g' : Y \to Z$ zwei stetige Abbildungen, so dass $f' \sim_{Y_0} g'$. Dann gilt

$$f' \circ f \sim_{X_0} g' \circ g.$$

Es sei $\mathfrak{H}$ die folgende Kategorie. Die Objekte sind die topologischen Räume und die Morphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{H}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{stetig}(X,Y)/\text{modulo Homotopie}.$$

d,h, die Menge der stetigen Abbildungen modulo Homotopie (d.h. relativ zu $X_0 = \emptyset$).

Zwei topologische Räume heißen homotopieäquivalent, wenn sie in der Kategorie $\mathfrak{H}$ isomorph sind. Wenn X homotopieäquivalent zu einem Punkt ist, so heißt X zusammenziehbar oder *kontrahierbar*.

Es sei X ein topologischer Raum. Es seien $x_0, x_1 \in X$. Wir bezeichenen mit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(x_1, x_0)$ die Menge alle stetigen Abbildungen $\gamma : I \to X$, so dass $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$ modulo Homotopie relativ zu $I_0 = \{0, 1\} \subset I$. Das nennt man Homotopieklassen von Wegen von x_0 nach x_1.

Wenn $x_2 \in X$ ein weiterer Punkt ist, so definiert man eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(x_1, x_0) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(x_2, x_1) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(x_2, x_0), \\ \omega \times \eta & \mapsto & \omega * \eta \end{array}$$

wo $\omega * \eta : I \to X$ wie folgt definiert ist:

$$\omega * \eta(t) = \begin{cases} \omega(2t), & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \eta(2t-1), & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Das ist wohldefiniert, d.h. das die Homotopieklasse von $\omega * \eta$ hängt nur von den Homotopieklassen von ω und η ab.

Man definiert die Kategorie $\mathcal{P}(X)$ wie folgt: Die Objekte sind die Punkte von X und die Morphismen sind die Mengen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(x_1, x_0)$. Diese Kategorie ist ein Gruppoid. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Funktor $f_* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$.

Wenn X eine konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$ ist, so bestehen alle Mengen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(x_1, x_0)$ aus genau einem Element, d.h. zwei beliebige Wege von x_0 nach x_1 sind homotop.

Definition 0.27 *Es sei $x_0 \in X$ ein Punkt. Dann definiert man die Fundamentalgruppe bezüglich des Basispunktes x_0:*

$$\pi(X, x_0) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(x_0, x_0)$$

Das ist eine Gruppe, weil $\mathcal{P}(X)$ ein Gruppoid ist. Es sei $\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(x_0, x_1)$. Dann ist

$$\mathrm{Ad}_\omega : \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_1), \quad \mathrm{Ad}_\omega(\gamma) := \omega * \gamma * \omega^{-1}.$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

Wenn X wegzusammenhängend ist, so sind die Gruppen $\pi(X, x_0)$ unabhängig von x_0 alle isomorph.

Beispiel: Es sei

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\},$$

wobei S^n mit der induzierten Topologie versehen ist. Man nennt S^n die n-dimensionale Sphäre.

Dann gilt für $n \geq 2$, dass $\pi(S^n, x_0) = 0$, wobei $x_0 \in S^n$ ein beliebiger Punkt ist. Später werden wir sehen, dass $\pi(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

Definition 0.28 *Ein topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, wenn er wegzusammenhängend ist und wenn es einen Punkt $x_0 \in X$ gibt, so dass $\pi(X, x_0) = 0$.*

Proposition 0.29 *Es sei $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz wegzusammenhängender topologischer Räume. Es sei $x_0 \in X$ und $f(x_0) = y_0$. Dann ist die induzierte Abbildung*

$$f_* : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0), \quad \omega \mapsto f \circ \omega,$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

Ist insbesondere X ein kontrahierbarer Raum, so gilt $\pi(X, x_0) = 0$ für alle Punkte $x_0 \in X$.

Der Satz über implizite Funktionen (L.S.Pontryagin, Ordinary differential equations)

Proposition 0.30 *Es sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Es seien*

$$f_i(t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

stetige Funktionen auf Γ. Die partiellen Ableitungen $\partial f_i / \partial x_j$, wo $i, j \in [1, n]$ mögen überall auf Γ existieren und stetig sein. Ferner gelte für alle $(\underline{t}, \underline{x}) \in \Gamma$, dass

$$\det \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\underline{t}, \underline{x}) \neq 0.$$

Es sei

$$X = \{(\underline{t}, \underline{x}) \in \Gamma \mid f_i(\underline{t}, \underline{x}) = 0, \text{ für } i \in [1, n]\}.$$

Dann ist die Einschränkung der Projektion $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ auf X:

$$\pi : X \to \mathbb{R}^m$$

ein lokaler Homöomorphismus.

(Bemerkung: Die lokalen Schnitte von π sind nur differenzierbar, wenn auch noch $\partial f_i / \partial t_k$ existieren und stetig sind.)