3. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 29.4.15

Aufgabe 1 Es werden Wörter der Länge n über einem Alphabet K mit q Elementen durch einen symmetrischen, gedächnislosen Kanal mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit $p \geq (q-1)/q$ geschickt. Wir decodieren mit der ML-Decodierung. Zu welchem Wort decodieren wir dann ein empfangenes Wort d?

Aufgabe 2 Zeigen Sie: Es gibt keinen binären $(7, 2^3, 5)$-Code.

Aufgabe 3 (a) Rechnen Sie nach, dass die Parameter $q = 2, n = 90, |C| = 2^{78}$ und $e = 2$ die Kugelpackungsgleichung

$$q^n = |C| \sum_{j=0}^{e} \binom{n}{j} (q-1)^j$$

erfüllen.

(b) Beweisen Sie, dass es keinen binären $(90, 2^{78}, 5)$-Code gibt.
Hinweis zu b): Sei C ein $(90, 2^{78}, 5)$-Code über $K = \mathbb{F}_2$. Wir dürfen annehmen, dass der Nullvektor in C liegt. Setze

$$\mathcal{V} := \{v = (v_1, \ldots, v_{90}) \in K^{90} \mid v_1 = v_2 = 1, d(v, 0) = 3\} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{C} := \{c = (c_1, \ldots, c_{90}) \in C \mid c_1 = c_2 = 1, d(c, 0) = 5\}.$$

Berechne $|\{(v, c) \mid v \in \mathcal{V}, c \in \mathcal{C}, \sum_{i=1}^{90} c_i v_i = 1\}|$ durch doppeltes Abzählen.

Aufgabe 4 Sei C perfekt, d.h es gibt ein $e \in N_0$ so, dass K^n die disjunkte Vereinigung der e-Kugeln $B_e(c)$, $c \in C$, ist.
Sei weiter $|C| > 1$.
Zeigen Sie: Die Minimaldistanz von C ist ungerade.