6. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 21.5.15

Aufgabe 1 Beweisen Sie:
Jeder lineare Code über $K = \mathbb{F}_q$ mit Kontrollmatrix $H \in Mat_{r,n}(K)$, deren Spaltenzahl maximal ist bezüglich der Eigenschaft, dass je zwei Spalten linear unabhängig sind, ist äquivalent zu einem Hamming-Code.

Aufgabe 2 Sei $C = C_{\mathcal{M}}$ ein $[n, k, n-k+1]$-Reed-Solomon-Code zu der Menge $\mathcal{M} = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq K$. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix G ist eine Erzeugermatrix für C:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & \ldots & a_n^2 \\ . & \ldots & . \\ . & \ldots & . \\ a_1^{k-1} & \ldots & a_n^{k-1} \end{pmatrix} \ \big(\text{Vandermonde-Matrix}\big).$$

(b) Folgere aus (a):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & \ldots & a_n^2 \\ . & \ldots & . \\ . & \ldots & . \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0 \ \big(\text{Vandermonde-Determinante}\big).$$

(b) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 \\ a_1 & \ldots & a_n & 0 \\ a_1^2 & \ldots & a_n^2 & 0 \\ . & \ldots & . & . \\ . & \ldots & . & . \\ a_1^{k-1} & \ldots & a_n^{k-1} & 1 \end{pmatrix}$$

ist Erzeugermatrix eines $[n+1, k, n-k+2]$-MDS-Codes.

Aufgabe 3 The binary Hamming code $C = Ham_2(4)$ encodes messages of length $2^4-4-1 = 11$ as codewords of length 15 by appending 4 control bits to the message.

(a) Compute the control matrix H of C.

(b) Use H to find a basis for C and then compute the generator matrix G of C.

(c) Encode the following messages:

$$(i)\ \ 01101100001, \qquad (ii)\ \ 00110011101$$

(*) If you followed the procedure of Kieran to compute the control matrix, then decode the following words:

$$(i)\ \ 110010001010110, \qquad (ii)\ \ 011011100110000$$

Please indicate in which position the error occurs (if at all) and then correct it. Once you've determined the correct codeword, retrieve the original message.