# 8. Übungsblatt

**Abgabe: Freitag, 5. Juni 2015**

**Aufgabe 1** (a) Sei $C$ ein $[n, k, d]$-Code über $K$ und $n \geq 2$. Beweisen Sie, dass der verkürzte Code

$$\check{\mathrm{C}} := \{(c_1, \ldots, c_{n-1}) \mid (c_1, \ldots, c_{n-1}, 0) \in C\} \subseteq K^{n-1}$$

die Dimension $k - 1$ oder $k$ hat, sowie mindestens die Minimaldistanz $d$.

(b) Weisen Sie die Existenz eines $[32, 28, 5]$- und eines $[28, 24, 5]$-Codes über dem Körper $\mathbb{F}_{2^8}$ nach.
Hinweis zu (b): Es gibt einen Reed-Solomon-Code der Länge 256 und der Dimension 252 über $\mathbb{F}_{2^8}$.

**Aufgabe 2** Gegeben sei ein linearer Code über $\mathbb{F}_2$ durch seine Erzeugermatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche Dimension und wieviele Codewörter hat der Code?

(b) Bestimmen Sie seine Minimaldistanz.

(c) Wieviele Fehler können erkannt bzw. korrigiert werden?

(d) Testen Sie, ob die Wörter (01111) und (11010) gültoge Codewörter sind.

(e) Geben Sie eine Erzeugermatrix für den dualen Code in systematischer Form an.

**Aufgabe 3** (a) Zeigen Sie, dass die Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ mit $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ für $u, v \in K^n$ nicht ausgeartet ist.

(b) Sei $C \leq K^n$. Beweisen Sie, dass $\dim C^{\perp} = n - \dim C$ ist. Insbesondere gilt also $(C^{\perp})^{\perp} = C$.

**Aufgabe 4** (a) Sei $C$ ein binärer Code der Länge $n$ mit $C \subseteq C^{\perp}$. ($C^{\perp}$ wird mit Hilfe der Bilinearform aus Aufgabe 3 gebildet). Beweisen Sie:

(i) $(1, \ldots, 1) \in C^{\perp}$.

(ii) Ist $C$ selbstdual, d.h. $C^{\perp} = C$, so gibt es für alle $i = 0, \ldots, n$ eine Bijektion zwischen der Menge der Codeworte vom Gewicht $i$ und der Menge der Codeworte vom Gewicht $n - i$.

(b) Sei $C$ ein binärer 4-dividierbarer Code, d.h. 4 teilt $wt(c)$ für jedes $c \in C$. Zeigen Sie, dass $C \subseteq C^{\perp}$ ist.