1. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 19. Oktober 2017

Aufgabe 1 Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ und f die Spiegelung an der Geraden $x_1 = x_2$.

(a) Bestimmen Sie zu f die Matrix bezüglich der Standardbasis B.

(b) Sei $C = \{(1,1),(2,0)\}$ und $D = \{(2,1),(1,2)\}$.
Bestimmen Sie mit Hilfe eines Basiswechsels $M_D^C(f)$.

Aufgabe 2 Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume mit rg $f = r$. Zeigen Sie, dass es Basen B von V und C von W gibt so, dass für $M_C^B(f)$ gilt

$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist E_r die $(r \times r)$-Einheitsmatrix und 0 die jeweils geeignete Nullmatrix.

Aufgabe 3 Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$, B und C Standardbasen des K^n bzw. K^m und $A = M_C^B(f)$. Für $b \in K^m$ sei $f^-(\{b\}) \neq \emptyset$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es ist $f = f_A$;

(b) $\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Im}(f)$;

(c) Hat $f(x) = 0$ nur die triviale Lösung, dann ist $\mathrm{rg}(A) = n$;

(d) Ist $\mathrm{rg}(A) = n$, dann hat $f(x) = 0$ nur die triviale Lösung.

Hinweis: Benutzen Sie den Homomorphiesatz in (c) und (d).

Aufgabe 4 Beweisen Sie durch die folgenden Schritte den zweiten Isomorphiesatz: Sind U und W Unterräume des K-Vektorraums V mit $U \subseteq W$, dann ist

$$(V/U)/(W/U) \cong V/W :$$

(a) Zeigen Sie, dass $f : V/U \to V/W, v + U \mapsto v + W$ eine Abbildung ist;

(b) Bestimmen Sie Ker f und Im (f);

(c) Wenden Sie den Homomorphiesatz auf f an.