Lineare Algebra II *WS 2017/18*
Barbara Baumeister

4. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 9. November 2017

Aufgabe 1 Gegeben sind die beiden Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\pi \circ \sigma^{-1}$.

(b) Stellen Sie π als Hintereinanderschaltung von disjunkten Zyklen dar.

(c) Stellen Sie σ als Hintereinanderschaltung von Transpositionen dar.

(d) Berechnen Sie π^4 und π^{1001}.

Aufgabe 2 (a) Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{N}$ so, dass es einen k-Zyklus in der symmetrischen Gruppe S_4 gibt. Geben Sie für jedes mögliche $k \in \mathbb{N}$ ein Beispiel an.

(b) Bestimmen Sie einen Homomorphismus mit möglichst kleinem Kern von S_4 nach $(\mathbb{Z}_2, +_2)$. (Beachten Sie dabei, dass sich jedes Element aus S_4 als Produkt von Transpostionen darstellen läßt.)

Aufgabe 3 Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $v = (a, b)$ und $w = (c, d)$ zwei Vektoren in V. Betrachten Sie das Parallelogramm P, welches durch die Vektoren v und w aufgespannt wird.

(a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von P in Abhängikeit von der Höhe h auf v und dem Vektor v;

(b) Bestimmen Sie h in Abhängigkeit des Winkels φ zwischen v und w und dem Vektor w;

(c) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt von P genau $|ad - bc|$ ist, wobei Sie benutzen können, dass (1.) $|v||w|\cos\varphi = ac + bd$ ist und (2.) dass für $u = (e, f) \in R^2$ gilt $|u|^2 = e^2 + f^2$ und (3.) dass gilt $1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$.

bitte wenden

Aufgabe 4 Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine $n \times n$-Matrix. Dann ist

$$A^t := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

die zu A transponierte Matrix. Zeigen Sie:

(a) Sind $A, B \in K^{n \times n}$, dann gilt $(AB)^t = B^t A^t$.

(b) Die Abbildung $t : K^{n \times n} \to K^{n \times n}, A \mapsto A^t$ ist ein Endomorphismus des K-Vektorraums $K^{n \times n}$.