# 5. Übungsblatt

**Abgabe: Donnerstag, 16. November 2017 bis 10 Uhr**

**Aufgabe 1** Gegeben seien die drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinanten dieser Matrizen, wobei Sie für jede Matrix ein anderes (dazu passendes) Verfahren wählen.

**Aufgabe 2** Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heisst *speziell*, falls $A = E_{k_1,l_1}(c_1)\cdots E_{k_t,l_t}(c_t)$ ein Produkt von Elementarmatrizen $E_{k,l}(c)$ für ein $t \in \mathbb{N}$ und $c_i \in K$ ist.
(Zur Erinnerung: $E_{k,l}(c)$ ist die Summe von $E_n$ und der Matrix, die an der Stelle $(k,l)$ den Wert $c$ hat und sonst überall Null ist.)

(a) Zeigen Sie, dass für $A$ speziell gilt $\det(A) = 1$.

(b) Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $\det(A) = 1$. Zeigen Sie, dass $A$ speziell ist.

Die Menge der speziellen Matrizen in $K^{n\times n}$ wird mit $SL_n(K)$ bezeichnet.

**Aufgabe 3** Sei $D(d) \in K^{n\times n}$ die Diagonalmatrix $(d_{i,j})$ mit $d_{1,1} = \ldots = d_{n-1,n-1} = 1$ und $d_{n,n} = d$, wobei $d \in K$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\det(AD(d)) = d \cdot \mathsf{det}(A)$ ist für jedes $A \in K^{n\times n}$.

(b) Sei $A \in K^{n\times n}$ regulär. Zeigen Sie, dass es eine spezielle Matrix $S$ und ein $d \in K$ gibt, so dass $A = SD(d)$ gilt.

(c) Sind $S$ und $d$ in (b) durch die Matrix $A$ eindeutig bestimmt?

bitte wenden

**Aufgabe 4** Sei $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis des $K$-Vektorraumes $K^n$ , $A \in K^{n \times n}$ und $\Delta$ eine beliebige Determinantenform auf $K^n$ . Zeigen Sie:

(a)
$$\mathsf{det}(A) = \frac{\Delta(Ae_1, \dots, Ae_n)}{\Delta(e_1, \dots, e_n)}.$$

(b) Sei $A$ regulär und sei $\Delta' : V \times \dots \times V \to K$ definiert durch $\Delta'(w_1, \dots, w_n) := \Delta(Aw_1, \dots, Aw_n)$. Dann ist $\Delta'$ eine Determinantenform. Für eine beliebige Basis $B' = \{v_1, \dots v_n\}$ von $V$ gilt:

$$\frac{\Delta(Av_1, \dots, Av_n)}{\Delta(v_1, \dots, v_n)} = \frac{\Delta(Ae_1, \dots, Ae_n)}{\Delta(e_1, \dots, e_n)}.$$