9. Übungsblatt

Abgabe: Donnerstag, 14. Dezember 2017 bis 10 Uhr

Aufgabe 1 Sei $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis des 4-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums V, und sei $h \in \mathsf{End}(V)$ mit

$$h(v_1) = 0_V, h(v_2) = v_1 + v_3, h(v_3) = -v_2 + v_3 + v_4, h(v_4) = v_1 - v_2 + v_3 + v_4.$$

(a) Berechnen Sie f_h und $\sigma(h)$.

(b) Berechnen Sie m_h und $V(a)$ für $a \in \sigma(h)$.

(c) Bestimmen Sie den diagonalisierbaren Endomorphismus D und den nilpotenten Endomorphismus N mit $h = D + N$ wie in der Vorlesung.

Aufgabe 2 Es sei $h \in \mathsf{End}(V)$ ein Endomorphismus mit Minimalpolynom

$$m_h = \prod_{i=1}^{r} (x - a_i)^{m_i}.$$

Zeigen Sie, dass h genau dann diagonalisierbar ist, wenn $m_1 = m_2 = \ldots = m_r = 1$ gilt.

Aufgabe 3 Sei $h \in \mathsf{End}(V)$ ein Endomorphismus und $p, q \in K[x]$ Polynome. Zeigen Sie:

(a) Ist a ein Eigenwert von h, dann ist $p(a)$ ein Eigenwert von $p(h)$.

(b) Es ist

$$p(h) \circ q(h) = q(h) \circ p(h) = (p \cdot q)(h).$$

Aufgabe 4 Sei $K = \mathbb{C}$ und $h \in \mathsf{End}(V)$. Weiter seien $N, D \in \mathsf{End}(V)$ der nilpotente und der diagonalisierbare Endomorphismus wie in der Vorlesung.

(a) Zeigen Sie: $N \circ D = D \circ N$.

(b) Sei $\tilde{N}$ ein weiterer nilpotenter Endomorphismus und $\tilde{D}$ ein weiterer diagonalisierbarer Endomorphismus von V so, dass gilt

$$h = \tilde{D} + \tilde{N} \text{ und } \tilde{D}\tilde{N} = \tilde{N}\tilde{D}.$$

Dann ist $D = \tilde{D}$ und $N = \tilde{N}$. Für den Beweis führen Sie die folgenden Schritte aus:

(b.a) Ist $a \in \sigma(h)$, dann ist $\tilde{N}(V(a)) \subseteq V(a)$.

(b.b) Es gibt eine Basis $B(a)$ von $V(a)$ so, dass die Matrix von $N_{|V(a)} : V(a) \to V(a)$ bezüglich $B(a)$ eine echte obere Dreiecksmatrix ist, d.h. eine Dreiecksmatrix mit allen Einträgen auf der Diagonalen gleich 0.

(b.c) Folgern Sie, dass $\mathsf{det}(\tilde{D}) = \mathsf{det}(h)$ gilt und daher $D = \tilde{D}$ und $N = \tilde{N}$.