12. PRÄSENZÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Jordanschen Normalformen der folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

Aufgabe 2 Sei $V = \mathbb{C}^8$ und $D \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ mit $m_D = x^2(x-1)^3$. Welche Jordanschen Normalformen kann D haben?

Aufgabe 3 Sei V ein $\mathbb{C}$-VR und $<,>$ ein Skalarprodukt auf V. Überprüfen Sie, dass $<,>$ eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform ist, d.h. dass $<,>$ linear in der ersten Komponente ist und gilt $< v, rw + sz >= \overline{r} < v, w > + \overline{s} < v, z >$ für alle $v, w, z \in V$ und $r, s \in \mathbb{C}$ (d.h. semilinear in der zweiten Komponente).

Aufgabe 4 Berechnen Sie jeweils den Winkel zwischen den folgenden Vektoren:

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

Aufgabe 5 Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von V. Durch $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ für $i = 1, 2, 3$, $\langle v_1, v_2 \rangle = -1$, $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$, $\langle v_2, v_3 \rangle = -1$ sei ein Skalarprodukt definiert. Berechnen Sie die Grammatrix $(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}$ und bestimmen Sie $\langle v, w \rangle$ für beliebige Vektoren $v, w \in V$.

Aufgabe 6 Sei $V = R^3$ und $M = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$. Bestimmen Sie $M^\perp$.