15. PRÄSENZÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Aufgabe 1 Es sei π in S_n eine Permutation und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$. Bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte von f.

Aufgabe 2 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt und $0 < \dim V < \infty$. Zeigen Sie: Sind S_1 und S_2 Spiegelungen von V gegeben als Matrizen, so gibt es eine orthogonale Matrix A so, dass $A^{-1}S_1A = S_2$ ist. Hinweis: Betrachen Sie erstmal ein Beispiel.

Aufgabe 3 Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $h \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal. Zeigen Sie, dass h einen Eigenwert hat.
Hinweis: Beobachten Sie, dass die komplexen Nullstellen eines reellen Polynoms dritten Grades paarweise auftreten (also c und $\overline{c}$).

Aufgabe 4 Sei $\dim V = n$ und $G = G(g, B)$ die Grammatrix einer symmetrischen Bilinearform bzw. einer hermiteschen Sesquilinearform g. Zeigen Sie:

(a) Für alle $v, w \in V$ gilt $g(v, w) = M^B(v)^t G \overline{M^B(w)}$.

(b) Sei C eine weitere Basis von V und $S = M_B^C(id)$. Dann ist $G(g, C) = S^t G \overline{S}$.

Aufgabe 5 Sei $\dim V = n$ und $G = G(g, B)$ die Grammatrix einer symmetrischen Bilinearform bzw. einer hermiteschen Sesquilinearform g. Dann sind äquivalent:

(a) g ist positiv definit.

(b) Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $d_r = \det((g(b_i, b_j))_{1 \le i,j \le r})$. Dann ist $d_r > 0$ für $1 \le r \le n$.

(c) Alle Eigenwerte von G sind positiv.