Gruppen mit Wurzelsystem vom Typ G_2 bzw. ${}^2F_4$

Helga Oueslati (geb. Kovács)

31. Oktober 2005

Zusammenfassung

Solche abstrakten Gruppen werden auf ihre Struktur untersucht, die von Untergruppen A_α, $\alpha \in \tilde{\Phi}$ erzeugt werden, wobei der Index α über ein Wurzelsystem vom Typ G_2 bzw. ${}^2F_4$ läuft. Die A_α, $\alpha \in \tilde{\Phi}$ sollen dabei als Untergruppen globale Relationen erfüllen, denen auch die Wurzeluntergruppen zu einem Moufang-Sechseck bzw. die zu einem Moufang-Achteck genügen und die eine Verallgemeinerung der Relationen zwischen den Wurzelelementen in Chevalley-Gruppen darstellen. Die Steinberg-Präsentation bestimmt die Gruppen, welche die Chevalley-Kommutatorrelationen erfüllen. Das Ziel ist, eine Art verallgemeinerte Steinberg-Präsentation für die Gruppen mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 bzw. ${}^2F_4$ anzugeben. Dies ist Bestandteil eines größeren Projektes, das eine Verallgemeinerung des Satzes von Steinberg für Gruppen mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ A_l, B_l, C_l, BC_l $(l \geq 2)$, $D_l(l \geq 4)$, $E_l(8 \geq l \geq 6)$, F_4, G_2 bzw. ${}^2F_4$ anstrebt. Die entsprechende Verallgemeinerung ist dank TIMMESFELD und MÜLLER schon zu großen Teilen gelungen. Als Hauptresultat klassifizieren wir die möglichen Strukturen, die sich für Gruppen mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 bzw. ${}^2F_4$ ergeben. Dabei bleibt die Frage nach den möglichen Zentralteilerzerlegungen im Falle von ${}^2F_4$ teilweise offen.

Mathematischer Hintergrund, Motivation und Resultate

Gebäude und ihre Klassifikation

Der von TITS vor einem halben Jahrhundert eingeführte Begriff des Gebäudes spielt in der Gruppentheorie eine wesentliche Rolle. Sphärische Gebäude liefern nämlich eine geometrische Interpretation algebraischer Gruppen über beliebigen Körpern. Die Klassifikation der dicken, irreduziblen, sphärischen Gebäude vom Rang $l \geq 3$ gelang TITS in [Tits74]. Die unter (4.4) in [Tits77] beschriebene freie Konstruktion weist darauf hin, dass irreduzible, sphärische Gebäude vom Rang 2 – die s. g. verallgemeinerten Polygone oder n-Ecke – zu allgemeine Objekte sind, um auf eine sinnvolle Art und Weise klassifiziert werden zu können. Infolgedessen war die Einführung einer zusätzlichen Bedingung notwendig, damit ein mit [Tits74] vergleichbares Ergebnis im Rang 2 erzielt werden konnte. Die in dem Nachtrag zu [Tits74] (s. S. 274) eingeführte Moufang-Bedingung scheint eine geeignete Einschränkung zu sein, da jedes dicke, irreduzible, sphärische Gebäude vom Rang $l \geq 3$ (s. Satz (1) unter (3.5) in [Tits77] und (4.16) in [Tits74]) sowie auch jedes irreduzible Residuum vom Rang mindestens 2 von solch einem Gebäude sie erfüllen (s. Lemma I (4.10) in [Tim01]). Insbesondere genügen diejenigen verallgemeinerten Polygone der Moufang-Bedingung, die irreduzible Rang-2-Residuen von dicken, irreduziblen, sphärischen Gebäuden vom höheren Rang sind.

Daher können die Letzteren im gewissen Sinne als Vereinigung verallgemeinerter Moufang-Polygone aufgefasst werden. Nach Satz (1) in [Tits76] bzw. einem viel allgemeineren Ergebnis in [Weiss79] (s. auch Satz (5.3.4) in [Mal98]) existieren Moufang-n-Ecke nur für $n = 3, 4, 6$ und 8. TITS und WEISS klassifizierten die Moufang-Polygone in [TW02]. Zu jedem Moufang-n-Eck können gewissen Kommutatorrelationen genügende Wurzeluntergruppen assoziiert werden (s. Kapitel 4-6 in [TW02]), die mit Hilfe von bestimmten algebraischen Strukturen parametrisiert werden können. Die Klassifikation der verallgemeinerten Polygone überträgt sich auf die von den zugehörigen Wurzeluntergruppen erzeugten s. g. Lie-Typ-Gruppen.

Eigenschaften von Lie-Typ-Gruppen

Unter einer Lie-Typ-Gruppe verstehen wir ganz allgemein eine Gruppe von gewissen Automorphismen eines sphärischen Moufang-Gebäudes im Sinne von TITS.

An dieser Stelle möchte ich nur auf Wurzeluntergruppen, Lie-Typ-Gruppen bzw. auf die Moufang-Bedingung näher eingehen. Eine Beschreibung der mit der Theorie von Gebäuden in Verbindung stehenden Begriffe befindet sich z. B. in [Tits74] bzw. in I §4 und II §5 in [Tim01] (s. auch Kapitel 3, 4, 39 und 40 in [TW02]).

Sei $\mathcal{B}$ ein dickes, irreduzibles, sphärisches Gebäude vom Rang $l \geq 2$, wobei wir $\mathcal{B}$ als Kammersystem über einer Indexmenge I (mit $|I| = l$) auffassen. Ferner seien $\mathcal{A}$ ein Apartment von $\mathcal{B}$ und Φ die Menge der Wurzeln von $\mathcal{A}$. Für jede Kammer $c \in \mathcal{B}$ und $i \in I$ steht $\Delta_i(c)$ für die Menge der Kammern von $\mathcal{B}$, die i-benachbart zu c sind. Wenn $\mathcal{A} \cap \Delta_i(c) \neq \emptyset$, dann nennen wir $\mathcal{A} \cap \Delta_i(c)$ ein i-Panel (oder kurz ein Panel) von $\mathcal{A}$. Eine Bijektion $\sigma \colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ mit

$$c \overset{i}{\sim} d \text{ genau dann, wenn } c^\sigma \overset{i}{\sim} d^\sigma \text{ für } c, d \in \mathcal{B} \text{ und } i \in I$$

heißt typerhaltender Automorphismus von $\mathcal{B}$. Die Gruppe der typerhaltenden Automorphismen von $\mathcal{B}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$. Für $r \in \Phi$ heißt die Gesamtheit derjenigen $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B})$, welche diejenigen Kammern $c \in \mathcal{B}$ festlassen, für die $\Delta_i(c) \cap \mathcal{A}$ für ein $i \in I$ ein in r enthaltenes Panel von $\mathcal{A}$ ist, die zu der Wurzel r von $\mathcal{A}$ korrespondierende Wurzeluntergruppe A_r von $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$. Wir nennen $G := \langle A_r \mid r \in \Phi \rangle \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ Lie-Typ-Gruppe von $\mathcal{B}$. Diese Definition ist nach Korollar II (5.16) in [Tim01] unabhängig von der Wahl des Apartments $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$.

Für jede Wurzel r von $\mathcal{A}$ sei $\mathcal{W}(r)$ die Menge der Apartments von $\mathcal{B}$, die r als Teilmenge enthalten. Nach I (4.9) in [Tim01] operiert A_r fixpunktfrei auf $\mathcal{W}(r)$.

Definition [1] *Wenn A_r für alle $r \in \Phi$ transitiv auf $\mathcal{W}(r)$ operiert, dann heißt $\mathcal{B}$ ein Moufang-Gebäude.*

Im Weiteren bezeichnen wir mit $\mathcal{B}$ immer ein dickes, irreduzibles, sphärisches Moufang-Gebäude vom Rang $l \geq 2$.

Unter Berücksichtigung von der geometrischen Realisation der zu $\mathcal{A}$ gehörenden Coxetergruppe können wir Φ mit einem Wurzelsystem vom Typ A_l, B_l, C_l $(l \geq 2)$, D_l $(l \geq 4)$, E_l $(8 \geq l \geq 6)$, F_4 oder $I_2(m)$, wobei $m = 3, 4, 6$ oder 8 im Sinne von HUMPHREYS (s. [Hum90]) identifizieren.

Die zu $\mathcal{B}$ assoziierten Wurzeluntergruppen erfüllen eine Art „Chevalley-Kommutatorrelationen“. Um die gewünschten Kommutatorrelationen zu erhalten, muss man eventuell zusätzliche Wurzeluntergruppen als Untergruppen der ursprünglichen Wurzeluntergruppen einführen und Φ zu einem möglicherweise nichtreduzierten Wurezelsystem $\tilde{\Phi}$ ergänzen, d. h. aus $r \in \tilde{\Phi}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $\lambda r \in \tilde{\Phi}$ folgt nicht unbedingt $\lambda = 1$. Bezüglich nichtreduzierter Wurzelsysteme verweisen wir auf [Bour02], insbesondere auf S. 233. Für die Erweiterung von $\widetilde{C_l \text{ zu }} BC_l$ siehe §3 in [Tim00] bzw. II (5.3) in [Tim01]. Eine detaillierte Beschreibung von $\widetilde{I_2(8)} = {}^2F_4$ befindet sich in [Tits83] (s. auch (5.4.5) in [Mal98]).

Wir setzen

$$R := \begin{cases} \mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0\sqrt{2} & \text{für } \tilde{\Phi} = {}^2F_4 \\ \mathbb{N} & \text{sonst} \end{cases}$$

und erhalten nach Satz (3.3) in [Tim00] und nach (6) in [Tits94] die folgende Eigenschaft:

(I) Für $r, s \in \tilde{\Phi}$ mit $r \notin \mathbb{R}^- \cdot s$ gilt

$$[A_r, A_s] \leq \left\langle A_{\lambda r + \mu s} \mid \lambda r + \mu s \in \tilde{\Phi}, \lambda, \mu \in R, \lambda > 0, \mu > 0 \right\rangle.$$

Es ist dem Resultat in I (4.12)(3) [Tim01] zu verdanken, dass Rang-1-Gruppen im Sinne von TIMMESFELD in der Strukturtheorie der Lie-Typ-Gruppen von $\mathcal{B}$ eine wichtige Rolle zukommt.

Definition [2] *Wir nennen eine Gruppe X eine Rang-1-Gruppe, falls sie von zwei verschiedenen nilpotenten Untergruppen A und B erzeugt wird, so dass*
($\star$) für jedes $a \in A^\sharp$ ein $b \in B^\sharp$ mit $A^b = B^a$ existiert und umgekehrt.[1]
Man nennt X eine spezielle Rang-1-Gruppe, falls für $a \in A^\sharp$, $b \in B^\sharp$, die ($\star$) erfüllen, auch $a^b = (b^{-1})^a =: b^{-a}$ erfüllt ist.
Die Konjugierten von A (und B) heißen die unipotenten Untergruppen von X.

Wir setzen

$$\widehat{\Phi} := \begin{cases} \Phi & \text{für } \tilde{\Phi} = {}^2F_4 \\ \tilde{\Phi} & \text{sonst} \end{cases}$$

und erhalten in Verbindung mit Lemma (3.2) in [Tim00] die folgende Eigenschaft:

(II) Für $r \in \widehat{\Phi}$ ist $X_r := \langle A_r, A_{-r} \rangle$ eine Rang-1-Gruppe mit unipotenten Untergruppen A_r und A_{-r}.

Nach dem Beweis von I (1.3) in [Tim01]) operiert X_r für $r \in \widehat{\Phi}$ zweifach transitiv auf $A_r^{X_r}$. Deswegen existiert ein $n_r \in X_r$ mit $A_r^{n_r} = A_{-r}$ und $A_{-r}^{n_r} = A_r$. Wir benutzen dafür die Schreibweise $A_r \xleftrightarrow{n_r} A_{-r}$. Die folgende Eigenschaft gilt für jedes von einem Moufang-Achteck verschiedene $\mathcal{B}$ nach II (5.11) in [Tim01] und für Moufang-Achtecke nach (6) in [Tits94] (s. auch (1.4) in [Tits83]):

(III) Sei $r \in \widehat{\Phi}$ und sei n_r ein Element von X_r mit $A_r \xleftrightarrow{n_r} A_{-r}$. Für $s \in \tilde{\Phi}$ gilt dann $A_s^{n_r} = A_{s^{w_r}}$, wobei w_r die Spiegelung entlang r auf $\tilde{\Phi}$ ist.

Die Steinberg-Präsentation

Die obigen Eigenschaften (I)-(III) der Lie-Typ-Gruppen von $\mathcal{B}$ erinnern an die Steinberg-Präsentation der Chevalley-Gruppen, welche ursprünglich auf komplizierte Weise als Gruppen gewisser Automorphismen von Lie-Algebren eingeführt wurden. STEINBERG fand einen rein

[1] Man kann an eine Rang-1-Gruppe als eine Verallgemeinerung von $SL_2(K)$ denken.

gruppentheoretischen Zugang zu ihnen in Form einer Präsentation durch Erzeugende und Relationen. Um sein Resultat (Satz 10 in [St67], s. auch Satz (5.2.2) in [Car72]) einfacher formulieren zu können, möchten wir die folgende Definition vorausschicken.

Definition [3] *Eine zentrale Erweiterung einer Gruppe G ist ein Paar $(\pi, \widehat{G})$, wobei $\widehat{G}$ eine Gruppe und $\pi\colon \widehat{G} \to G$ ein surjektiver Homomorhismus mit $\mathrm{Kern}(\pi) \subseteq Z(\widehat{G})$ sind. Eine zentrale Erweiterung (σ, E) einer Gruppe G heißt universell, wenn für jede zentrale Erweiterung $(\widehat{\sigma}, \widehat{E})$ von G genau ein surjektiver Homomorhismus $\varphi\colon E \to \widehat{E}$ existiert, so dass $\widehat{\sigma}\varphi = \sigma$.*

Satz von Steinberg [4] *Sei $\Phi(K)$ eine Chevalley-Gruppe über einem Körper K mit $|K| > 4$ und mit einem Wurzelsystem Φ vom Rang $l \geq 2$, das der kristallographischen Bedingung genügt. Ferner sei G die abstrakte Gruppe, die von Symbolen $x_r(t)$, $r \in \Phi$, $t \in K$ erzeugt wird, welche die folgenden Relationen erfüllen:*

(1) Für $r \in \Phi$ und $t, u \in K$ gilt:

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u).$$

(2) Für linear unabhängige $r, s \in \Phi$ und $t, u \in K$ gilt:

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{\lambda,\mu\in\mathbb{Z}^+;\ \lambda r+\mu s\in\Phi} x_{\lambda r+\mu s}(C_{\lambda\mu rs}(-t)^\lambda u^\mu)$$

mit festgelegten Konstanten $C_{\lambda\mu rs} \in \{\pm1, \pm2, \pm3\}$, wobei das Produkt nach wachsendem $\lambda + \mu$ angeordnet ist.

Dann ist G die universelle zentrale Erweiterung von $\Phi(K)$.

Sei $A_r := \{a_r(t) \mid t \in k\}$ für $r \in \Phi$. Die Bedingung (I) ist für die A_r, $r \in \Phi$ wegen der s. g. Chevalley-Kommutatorrelationen unter (2) erfüllt. Außerdem erzeugen A_r und A_{-r} für $r \in \Phi$ nach dem Beweis von Satz 10 in [St67] eine Rang-1-Gruppe, wobei A_r und A_{-r} nach (1) abelsch sind. Nach Lemma (7.2.1) in [Car72] gelten in Chevalley-Gruppen auch die Relationen (III). Damit sind die Eigenschaften (I)-(III) der Lie-Typ-Gruppen von $\mathcal{B}$ schwächer als die elementweisen Relationen (1) und (2) von [4].

Die verallgemeinerten Steinberg-Relationen

TIMMESFELD arbeitet an der Verallgemeinerung der Steinberg-Präsentation, indem er einen ähnlichen Satz für die Lie-Typ-Gruppen von $\mathcal{B}$ zeigen möchte. Dabei ersetzt er die schwer verifizierbaren elementweisen Chevalley-Kommutatorrelationen durch „globalere“ Relationen. Sein Interesse gilt der Frage, inwieweit die Struktur der Lie-Typ-Gruppen durch die Eigenschaften (I)-(III) bestimmt ist. Hierfür betrachtet er – losgelöst von der Vorstellung von Moufang-Gebäuden – abstrakte Gruppen $G = \left\langle A_r \mid r \in \tilde{\Phi} \right\rangle$, die von Untergruppen[2] $A_r \neq 1$ erzeugt werden, wobei der Index r über ein eventuell nichtreduziertes Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ läuft und die A_r die Bedingungen (I)-(III) erfüllen. Er zeigte in [Tim03a] (s. Satz (1)), dass die Relationen (I)-(III) gewissermaßen ausreichend für die Charakterisierung von G sind. Zu G kann nämlich ein Moufang-Gebäude $\mathcal{B}$ assoziiert werden, so dass G eine zentrale Erweiterung einer Lie-Typ-Gruppe von $\mathcal{B}$ ist.[3]

[2] Diese Untergruppen nennen wir Wurzeluntergruppen.

[3] Es sei bemerkt, dass die Voraussetzungen von Satz (1) in [Tim03a] für $\tilde{\Phi} = {}^2F_4$ nicht erfüllt sind, aber die Behauptung gilt nach dem Beweis auch in diesem Fall, da dass X_α Rang-1-Gruppe ist, nur für $\alpha \in \Phi$ gebraucht wird.

Satz [5] *Sei $\tilde{\Phi}$ ein Wurzelsystem vom Typ A_l, B_l, C_l, BC_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$), E_l ($8 \geq l \geq 6$), F_4, G_2 oder ${}^2F_4$. Ferner sei G eine Gruppe, die von Untergruppen $A_r \neq 1$, $r \in \tilde{\Phi}$ erzeugt wird, die (I)-(III) genügen. Außerdem gelte $A_{2r} \leq A_r$, wenn $2r \in \tilde{\Phi}$ für $r \in \tilde{\Phi}$ bzw. $A_{(\sqrt{2}+1)r} \leq A_r$, wenn $(\sqrt{2}+1)r \in \tilde{\Phi}$ für $r \in \tilde{\Phi}$. Dann existieren ein irreduzibles, sphärisches Moufang-Gebäude $\mathcal{B}$ und ein surjektiver Homomorphismus $\varphi\colon G \to \overline{G}$, wobei $\overline{G}$ Lie-Typ-Gruppe von $\mathcal{B}$ ist, so dass die A_r mit $r \neq 2s$ und $r \neq (\sqrt{2}+1)s$ für alle $s \in \tilde{\Phi}$ vermöge φ auf die zu den Wurzeln eines Apartments $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$ korrespondierenden Wurzeluntergruppen abgebildet werden. Ferner liegt* $\mathrm{Kern}(\varphi)$ *in dem Zentrum von G.*

Wenn eine Gruppe G die Voraussetzungen von [5] erfüllt, dann sagen wir, dass sie vom Typ $\mathcal{B}$ bzw. $\tilde{\Phi}$ ist. Leider ist Eigenschaft (III) schwer zu kontrollieren, deswegen ist ihre Ersetzung durch eine Bedingung erwünscht, die man besser im Griff hat.

TIMMESFELD konnte in [Tim03a] (s. Satz (2)) zeigen, dass man auf die explizite Forderung von (III) verzichten kann, wenn man in (I) immer Gleichheit hat:

Satz [6] *Sei $\tilde{\Phi}$ wie in [5], aber verschieden von ${}^2F_4$. Sei G eine Gruppe, die von Untergruppen $A_r \neq 1$, $r \in \tilde{\Phi}$ erzeugt wird, die (I) und (II) genügen, so dass in den Kommutatorrelationen von (I) immer Gleichheit herrscht. Dann gilt auch (III) und G ist vom Typ $\tilde{\Phi}$.*

Leider sind die Voraussetzungen von [6] zu einschränkend, da sie von Chevalley-Gruppen vom Typ B_l, C_l oder F_4 in Charakteristik 2 oder von denen vom Typ G_2 in Charakteristik 3 nicht erfüllt werden. In diesen Fällen degenerieren nämlich die Kommutatorrelationen von (I) teilweise, d. h. man hat strikte Ungleichheit für eine gewisse Wahl von r und s. So kann die Struktur dieser Gruppen unter Verwendung von [6] nicht identifiziert werden. Deswegen möchten wir lieber auf die Verschärfung von (I) verzichten, und eine einheitliche Klassifikation solcher Gruppen erzielen, welche von nichttrivialen Untergruppen erzeugt werden, die den Bedingungen (I) und (II) genügen. So eine Klassifikation kann als eine weit reichende Verallgemeinerung der Steinberg-Präsentation von Chevalley-Gruppen aufgefasst werden, deswegen werden wir die folgende Sprechweise benutzen: G genügt den verallgemeinerten Steinberg-Relationen (oder kurz (S)). Unter solchen Voraussetzungen ist aber insbesondere der Fall zugelassen, wenn alle Kommutatorrelationen in (I) trivial sind, so dass für $r \in \Phi$ und für $s \in \Phi \setminus \{\pm r\}$ die Kommutatorrelation $[X_r, X_s] = 1$ gilt. In dieser Situation sagen wir, dass G das zentrale Produkt der Rang-1-Gruppen X_r, $r \in \Phi$ ist.[4] Deswegen muss so eine Möglichkeit in den Behauptungen bezüglich der Struktur von G auftreten. Das weitgesteckte Ziel besteht in dem Nachweis davon, dass die Gruppe G zentrales Produkt von Faktoren ist, die Lie-Typ-Gruppen oder Rang-1-Gruppen sind.

Dieses Problem wurde in einer Folge von Artikeln [Tim00], [Tim02a], [Tim02b], [Tim03a], [Tim03b], [Tim05a], [Tim05b], [Mü02] und [Mü05] größten Teils gelöst, deren Resultate im Weiteren resümiert werden. Außerdem werden noch offene Fragen angesprochen und es wird geklärt, inwieweit wir zur einheitlichen Klassifikation der Gruppen beitragen, welche (S) genügen.

Als Erstes behandelte TIMMESFELD den Fall, wenn $\tilde{\Phi}$ nur Einfachbindungen hat, und erzielte das folgende Ergebnis in [Tim02a] bezüglich der möglichen Strukturen von $G(\tilde{\Phi})$.

Satz [7] *Sei G eine Gruppe, die (S) bezüglich eines Wurzelsystems $\tilde{\Phi}$ vom Typ A_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$) oder E_l ($8 \geq l \geq 6$) genügt. Dann gilt:*

[4] Sei G eine Gruppe und sei $\{G_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ eine Menge von Untergruppen von G. Falls $G = \langle G_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ und $[G_i, G_j] = 1$ für $i \neq j$, dann nennen wir G das zentrale Produkt der Untergruppen G_i ($1 \leq i \leq n$).

(1) $\tilde{\Phi} = \dot{\cup}\Psi_i$ *mit* Ψ_i *Unterwurzelsystem*[5] *von* $\tilde{\Phi}$ *oder* $\Psi_i = \{\pm r_i\}$ *für ein* $r_i \in \tilde{\Phi}$.

(2) Die Gruppe G *ist das zentrale Produkt der Untergruppen* $G(\Psi_i) = \langle A_r \mid r \in \Psi_i \rangle$. *Überdies ist* $G(\Psi_i) = X_{r_i}$ *oder* $G(\Psi_i)$ *erfüllt die Voraussetzungen von [5] bezüglich des Wurzelsystems* Ψ_i *und ist so vom Typ* Ψ_i.[6]

Für den Beweis dient Lemma II (1.2)(2) in [Tim01] gewissermaßen als Induktionsverankerung, das an dieser Stelle zitiert wird.

Lemma [8] *Sei* $\tilde{\Phi} = \{\pm r, \pm s, \pm(r+s)\}$ *ein Wurzelsystem vom Typ* A_2. *Angenommen,* G *erfüllt (S) bezüglich* $\tilde{\Phi}$. *Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

(1) $G = X_r * X_s * X_{r+s}$.

(2) In den Kommutatorrelationen (II) herrscht immer Gleichheit.
Überdies ist

$$[a, A_\alpha] = A_{\alpha+\beta} = [A_\alpha, b]$$

für alle $a \in A_\alpha^\sharp$, $b \in A_\beta^\sharp$ *und alle* $\alpha, \beta \in \tilde{\Phi}$ *mit* $\alpha + \beta \in \tilde{\Phi}$.

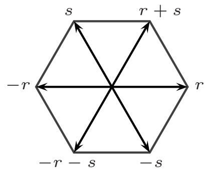

Abb. 1: *Das Wurzelsystem* $\tilde{\Phi}$ *vom Typ* A_2.

Bedauerlicherweise lässt sich Satz [7] nicht ohne Weiteres auf Wurzelsysteme mit Mehrfachbindungen übertragen, weil die zu den zentralen Faktoren gehörenden Teilmengen von $\tilde{\Phi}$ nicht unbedingt Unterwurzelsysteme von $\tilde{\Phi}$ sind.

Beispiel [9] *Typischerweise tritt diese Situation auf, wenn*

$$\tilde{\Phi} = C_2 = \{\pm r, \pm s, \pm(r+s), \pm(2r+s)\},$$

$\Psi_1 = \{\pm s\}$, $\Psi_2 = \{\pm r, \pm(r+s), \pm(2r+s)\}$ *und* $G = G(\Psi_1) * G(\Psi_2)$ *mit* $G(\Psi_1) = X_s \simeq SL_2$ *bzw.* $G(\Psi_2) = \langle X_r, X_{r+s}, X_{2r+s} \rangle \simeq SL_3$. *In diesem Fall setzen wir* $\alpha := r+s$ *und betrachten die Menge* $\Psi_2 = \{\pm r, \pm\alpha, \pm(r+\alpha)\}$ *als Wurzelsystem vom Typ* A_2 *und benutzen die Sprechweise: „*Ψ_2 *trägt die Struktur eines Wurzelsystems vom Typ* A_2*“. Es sei aber betont, dass* Ψ_2 *kein Unterwurzelsystem von* $\tilde{\Phi}$ *ist. Die Gruppe* $G \simeq SL_2(K) * SL_3(K)$ *erfüllt somit (S) mit* $\tilde{\Phi} = C_2$ *und* Ψ_1 *vom Typ* A_1 *bzw.* Ψ_2 *vom Typ* A_2.

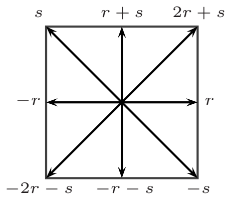

Abb. 2: *Das Wurzelsystem* $\tilde{\Phi}$ *vom Typ* C_2.

[5]Eine Teilmenge Ψ von $\tilde{\Phi}$ heißt Unterwurzelsystem, falls $r+s \in \Psi$ für alle $r, s \in \Psi$ mit $r+s \in \tilde{\Phi}$.

[6]Zentrale Faktoren, die Rang-1-Gruppen sind, werden der Einheitlichkeit halber gegebenenfalls als zum Unterwurzelsystem A_1 gehörende Lie-Typ-Gruppen betrachtet.

Sei $\tilde{\Phi}$ wie in [5]. Für eine Teilmenge $\Delta \subseteq \tilde{\Phi}$ setzen wir $G(\Delta) := \langle A_r \mid r \in \Delta \rangle$ und sagen im weiteren Verlauf, dass $G(\Delta)$ vom Typ Δ ist, wenn Δ „die Struktur eines Wurzelsystems trägt“[7] und $G(\Delta)$ die Voraussetzungen von [5] bezüglich Δ erfüllt.

Der erste Schritt zur Lösung des oben dargestellten Problems bezüglich Wurzelsysteme mit Mehrfachbindungen ist MÜLLER zu verdanken. Er behandelte den Fall $\tilde{\Phi} = C_2$ in [Mü02]. Sein Hauptresultat lautet wie folgt:

Satz [10] *Angenommen, G erfüllt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ C_2. Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

(1) Für eine lange Wurzel $s \in \tilde{\Phi}$ ist $X_s \lhd G$ mit $G = X_s * C_G(X_s)$.

(2) Für jedes $r \in \tilde{\Phi}$ ist A_r eine elementarabelsche 2-Gruppe.

(3) In den Kommutatorrelationen von (I) herrscht immer Gleichheit.

In dem Beweis von [10] ist die Existenz zentraler Involutionen ein wichtiges Hilfsmittel, die wie die lineare Abbildung $-\mathrm{id}$ auf einem Vektorraum V über einem Körper in Charakteristik verschieden von 2 operieren.

In [Tim02b] wurde [10] folgendermaßen verschärft:

Folgerung [11] *Angenommen, G erfüllt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ C_2 und es gibt kein Element $r \in \tilde{\Phi}$, für das A_r eine elementarabelsche 2-Gruppe ist. Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

(1) Es ist $G = \mathop{\ast}\limits_{r \in \tilde{\Phi}} X_r$.

(2) Für eine lange Wurzel $s \in \tilde{\Phi}$ ist $X_s \lhd G$. Überdies ist $G = X_s * G(\Delta)$, wobei $\Delta := \tilde{\Phi} \setminus \{\pm s\}$ die Struktur eines Wurzelsystems vom Typ A_2 trägt und $G(\Delta)$ vom Typ A_2 ist.

(3) Die Gruppe G ist vom Typ C_2.

Als Nächstes diente die Kenntnis der Möglichkeiten für $G(C_2)$ als Ausgangspunkt für Wurzelsysteme vom Typ B_l, C_l oder F_4 in von 2 verschiedenen Charakteristiken. Es wurde unter Verwendung von [11] in [Tim02b] gezeigt, dass G einen „Lie-Typ-Faktor“ hat (der gleich G sein kann).

Satz [12] *Sei G eine Gruppe, die (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ B_l, C_l $(l \geq 2)$ oder F_4 erfüllt. Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

(1) G ist vom Typ $\tilde{\Phi}$.

(2) Es ist $\tilde{\Phi} = J \dot{\cup} K$ mit $J \neq \emptyset \neq K$ und entweder $J = \{\pm r\}$ für ein $r \in \tilde{\Phi}$ oder J trägt die Struktur eines unzerlegbaren Wurzelsystems Ψ vom Rang mindestens 2. Außerdem ist $G = G(J) * G(K)$, und $G(J)$ ist entweder eine Rang-1-Gruppe oder eine Gruppe vom Typ Ψ.

(3) Es ist $J' := \{r \in \Phi \mid A_r$ ist eine elementarabelsche 2-Gruppe$\} \neq \emptyset$ und $G = G(J') * G(K)$ mit $K := \Phi \setminus J'$.

Satz [12] liefert uns erst dann echte Information, wenn die Charakteristik von 2 verschieden ist. Die Einschränkung bezüglich der Charakteristik rührt von [Mü02] und ist für das Erhalten zentraler Involutionen in bestimmten Rang-1-Gruppen nötig. Mit Hilfe von ihnen kann man zeigen, dass entweder Fall (2) zutrifft, oder es herrscht immer Gleichheit in den Kommutatorrelationen von (I) und ein Gebäude kann konstruiert werden, auf dem die A_r wie die entsprechenden Wurzeluntergruppen operieren.

[7] Dieses Wurzelsystem bezeichnen wir auch mit Δ.

Letztendlich wurden die Ergebnisse von [Tim02b] in [Tim05a] einerseits verfeinert und andererseits auf Charakteristik 2 ausgeweitet.

Satz [13] *Angenommen, G erfüllt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ B_l, C_l $(l \geq 2)$ oder F_4. Dann gilt:*

(1) $\tilde{\Phi} = \dot{\cup}\Psi_i$, wobei Ψ_i entweder die Struktur eines der Wurzelsysteme A_n, B_n, C_n, D_n oder F_4 trägt oder $\Psi_i = \{\pm r_i\}$ für ein $r_i \in \tilde{\Phi}$.

(2) Die Gruppe G ist das zentrale Produkt der Untergruppen $G(\Psi_i)$ mit $G(\Psi_i)$ vom Typ Ψ_i oder $G(\Psi_i) = X_{r_i}$.

Tatsächlich sind die möglichen Zerlegungen von $\tilde{\Phi}$ und G kompliziert. Falls $\tilde{\Phi} = F_4$ ist, so ist es möglich, dass ein zentraler Faktor von G vom Typ A_5 ist, d. h. vom höheren Rang als das zugrundeliegende Wurzelsystem. (Ein ähnlicher Fall tritt auch bei $\tilde{\Phi} = G_2$ in Erscheinung: G kann nämlich vom Typ A_3 sein.) Wenn aber $\tilde{\Phi}$ vom Typ B_l oder C_l ist, dann ist $n \leq l$ für n wie unter (1).

Die Behandlung des Falles $\tilde{\Phi} = C_2$ in Charakteristik 2 dient als Induktionsbasis für [13]. TIMMESFELD zeigte, dass [11] in jeder Charakteristik gilt, indem er die zentralen Involutionen in Charakterisik 2 durch die Beobachtung ersetzte, dass jede Rang-1-Gruppe speziell ist, deren unipotente Untergruppen elementarabelsche 2-Gruppen sind.

Bezüglich $\tilde{\Phi} = BC_l$ wurde in [Tim03b] ein zu [12] korrespondierendes Ergebnis erzielt.

Satz [14] *Angenommen, G genügt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ BC_l $(l \geq 2)$. Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

(1) G ist vom Typ BC_l.

(2) Es ist $A_r = A_{2r}$ für alle $r \in \tilde{\Phi}$ mit $2r \in \tilde{\Phi}$. Es herrscht in (I) immer Gleichheit bezüglich des Wurzelsystems $\Phi_0 = \{2r \mid r, 2r \in \tilde{\Phi}\} \cup \{s \mid s \in \tilde{\Phi}, 2s \notin \tilde{\Phi}\}$ vom Typ C_l und so ist G vom Typ C_l.

(3) Es ist $\Phi = J\dot{\cup}K$ mit $J \neq \emptyset \neq K$ und entweder $J = \{\pm r\}$ bzw. $J = \{\pm r, \pm 2r\}$ oder J trägt die Struktur eines unzerlegbaren Wurzelsystems Ψ vom Rang $r \geq 2$. Außerdem ist $G = G(J) * G(K)$ und $G(J)$ ist vom Typ Ψ oder $G(J) = X_r$ ist eine Rang-1-Gruppe.

(4) Es ist $J' := \left\{r \in \tilde{\Phi} \mid A_r \text{ ist eine elementarabelsche 2-Gruppe}\right\} \neq \emptyset$. Wir setzen $J'' := J' \cup \{s \in \tilde{\Phi} \mid 2s \in J'\}$ und $K := \tilde{\Phi} \setminus J''$. Dann ist $G = G(J'') * G(K)$.

Der Beweis des obigen Satzes erfolgt mit Hilfe eines mit [10] vergleichbaren Ergebnisses für BC_2 und der Diskussion der für $G(\Phi_0)$ in §3 in [Tim03b] erhaltenen Möglichkeiten, wobei Φ_0 wie unter (2) ist.

In [Tim05b] wurde [14] vertieft und auf Charakteristik 2 verallgemeinert, was bis auf die Fälle $\tilde{\Phi} = G_2$ bzw. $\tilde{\Phi} = {}^2F_4$ zu einer einheitlichen Klassifikation der Gruppen G führte, welche den verallgemeinerten Steinberg-Relationen genügen. Der folgende Satz zeigt, dass G ein zentrales Produkt von Faktoren ist, die Lie-Typ- oder Rang-1-Gruppen sind.

Satz [15] *Sei G eine Gruppe, die (S) bezüglich eines Wurzelsystems vom Typ A_l, B_l, C_l, BC_l $(l \geq 2)$, D_l $(l \geq 4)$, E_l $(8 \geq l \geq 6)$ oder F_4 erfüllt.*
Sei $\Psi = \{r \in \tilde{\Phi} \mid 2r \notin \tilde{\Phi}\} \cup \{s \in \tilde{\Phi} \mid 2s \in \tilde{\Phi} \text{ und } A_s \neq A_{2s}\}$. Dann gilt:

(1) $\Psi = \dot{\cup}\Psi_i$, wobei Ψ_i die Struktur eines Wurzelsystems vom Typ A_n, B_n, C_n, BC_n $(n \geq 2)$, D_n $(n \geq 4)$, E_n $(8 \geq n \geq 6)$ oder F_4 trägt oder $\Psi_i = \{\pm r\}$ bzw. $\Psi_i = \{\pm r, \pm 2r\}$ für ein $r \in \Psi$.

(2) Die Gruppe G ist das zentrale Produkt der Untergruppen $G(\Psi_i)$. Ferner ist $G(\Psi_i)$ vom Typ Ψ_i oder $G(\Psi_i) = X_r$ (wenn $\Psi_i = \{\pm r\}$ bzw. $\Psi_i = \{\pm r, \pm 2r\}$).

Das folgende Beispiel aus §1 in [Tim05b] zeigt, dass die Unterscheidung zwischen $\tilde{\Phi}$ und Ψ in [15] notwendig ist.

Beispiel [16] *Seien* $\tilde{\Phi} = BC_2 = \{\pm r, \pm s, \pm(r+s), \pm(2r+s), \pm 2r, \pm(2r+2s)\}$. *und* $\Psi_1 = \{\pm r, \pm 2r\}$. *Außerdem sei* $G(\Psi_1) = X_r$ *eine unitäre Gruppe vom Witt-Index 1 und von Dimension mindestens* 3. *Dann ist* $X_{2r} < X_r$ *die korrespondierende unitäre Gruppe vom Witt-Index* 1 *und von Dimension* 2. *Es ist möglich, dass* $A_{r+s} = A_{2r+2s}$, $A_{-r-s} = A_{-2r-2s}$ *und so* $\Psi_2 \neq \tilde{\Phi} \setminus \Psi_1$. *Ferner trägt* Ψ_2 *die Struktur eines Wurzelsystems vom Typ* A_2 *und* $G(\Psi_2) \simeq SL_3$. *In diesem Fall erfüllt* $G(\Psi_1) \times G(\Psi_2)$ *die Voraussetzungen von [15] mit* $\tilde{\Phi}$ *vom Typ* BC_2.

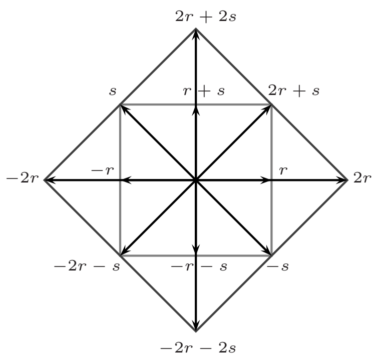

Abb. 3: *Das Wurzelsystem* $\tilde{\Phi}$ *vom Typ* BC_2.

Satz [15] lässt noch den Fall offen, wenn $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 bzw. ${}^2F_4$ ist. MÜLLER behandelte $\tilde{\Phi} = G_2$ in [Mü05] und erzielte ein zu [12] ähnliches Ergebnis. Er zeigte, dass eine (S) bezüglich G_2 genügende Gruppe – bis auf die Charakteristiken 2 und 3 – einen zentralen Faktor besitzt, der eine Lie-Typ- oder eine Rang-1-Gruppe ist.

Sei $\tilde{\Phi} = \{\pm r, \pm s, \pm(r+s), \pm(2r+s), \pm(3r+s), \pm(3r+2s)\}$.

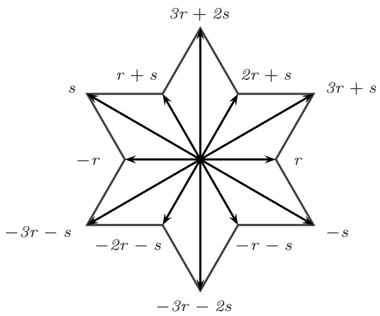

Abb. 4: *Das Wurzelsystem* $\tilde{\Phi}$ *vom Typ* G_2.

Wir bemerken, dass die Menge der langen Wurzeln $\Psi = \{\pm s, \pm(3r+s), \pm(3r+2s)\}$ ein Unterwurzelsystem vom Typ A_2 von $\tilde{\Phi}$ ist. Das Hauptresultat von [Mü05] lautet wie folgt:

Satz [17] *Sei* $\tilde{\Phi}$ *ein Wurzelsystem vom Typ* G_2 *und sei* G *eine Gruppe, die (S) bezüglich* G_2 *erfüllt. Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

(1) Die Gruppe G *ist vom Typ* G_2.
(2) Die Gruppe G *ist vom Typ* A_3.
(3) Entweder sind alle A_α, $\alpha \in \tilde{\Phi}$ *elementarabelsche* 2*-Gruppen oder elementarabelsche* 3*-Gruppen.*
(4) Es gilt $G = X_\alpha * C_G(X_\alpha)$ *für ein* $\alpha \in \tilde{\Phi}$ *und* $X_\beta \leq C_G(X_\alpha)$ *für alle* $\beta \in \tilde{\Phi} \setminus \{\pm\alpha\}$, *oder* $G = G(\Psi) * G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$ *ist vom Typ* $A_2 \times A_2$.

In dem Beweis kommt es durch eine gruppentheoretische Kennzeichnung der Charakteristiken 2 und 3 zur Abspaltung von (3). MÜLLER zeigte nämlich in (4.10) in [Mü05]: Angenommen, $G(\Psi)$ ist vom Typ A_2, $[A_s, A_r] \neq 1$ und $[A_{r+s}, A_{2r+s}] = 1$. Dann sind alle Wurzeluntergruppen elementarabelsche 2-Gruppen oder elementarabelsche 3-Gruppen. Unter der Annahme, dass (4) nicht gilt und $[A_{r+s}, A_{2r+s}] \neq 1$ ist, folgerte er dann auf die Gültigkeit von (1) oder (2). Dabei sind zentrale Involutionen von entscheidender Bedeutung.

Die Einteilung in [17] liefert keine disjunkten Fälle (s. [Mü05]), was anhand der folgenden Beispiele erläutert wird.

In Chevalley-Gruppen vom Typ G_2 nimmt Charaktaristik 3 eine Sonderrolle ein, weil die Kommutatorrelationen in (I) teilweise degenerieren. Für $G_2(3)$ erhalten wir die folgenden Kommutatorrelationen zwischen den Wurzeluntergruppen, welche zu $GF(3)$ isomorphe, elementarabelsche 3-Gruppen sind:

$$\begin{aligned} [A_{r+s}, A_{2r+s}] &= 1, \\ [A_s, A_{3r+s}] &= A_{3r+2s}, \\ [A_{r+s}, A_r] &= A_{2r+s}, \\ [A_s, A_r] &< A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}A_{3r+s}. \end{aligned}$$

Ähnliches trifft für die Chevalley-Gruppe vom Typ G_2 über dem Körper $GF(2)$ zu. Die Wurzeluntergruppen sind zu $GF(2)$ isomorphe, elementarabelsche 2-Gruppen und erfüllen die Relationen:

$$\begin{aligned} [A_{r+s}, A_{2r+s}] &= A_{3r+2s}, \\ [A_s, A_{3r+s}] &= A_{3r+2s}, \\ [A_{r+s}, A_r] &< A_{3r+2s}A_{3r+s}, \\ [A_s, A_r] &< A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}A_{3r+s}. \end{aligned}$$

Die Chevalley-Gruppen $G_2(2)$ und $G_2(3)$ sind vom Typ G_2, weil sie den Relationen (I)-(III) und so den Voraussetzungen von [5] genügen. Ihre Struktur wird aber von [17] erfasst.

Es stellt sich die Frage, ob man die Ausnahme der kleinen Charakteristiken beheben und eine einheitliche Klassifikation von Gruppen erzielen kann, welche den verallgemeinerten Steinberg-Relationen bezüglich G_2 genügen. Wir möchten [17] verallgemeinern und verfeinern. Als Erstes zeigen wir, dass man mit Hilfe von Beweismethoden, die auf das Vorhandensein von zentralen Involutionen verzichten, auf die Gültigkeit der in [17] angegebenen Einteilung unabhängig von der Charakteristik schließen kann. Dabei werden wir uns auf die „charakteristikfreien" Ergebnisse von MÜLLER stützen.

Proposition [18] *Sei $\tilde{\Phi}$ ein Wurzelsystem vom Typ G_2 und sei G eine Gruppe, die (S) bezüglich G_2 genügt. Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

(1) Die Gruppe G ist vom Typ G_2.

(2) Die Gruppe G ist vom Typ A_3.

(3) Es gilt $G = X_\alpha * C_G(X_\alpha)$ für ein $\alpha \in \tilde{\Phi}$ und $X_\beta \leq C_G(X_\alpha)$ für alle $\beta \in \tilde{\Phi} \setminus \{\pm\alpha\}$ oder $G = G(\Psi) * G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$ ist vom Typ $A_2 \times A_2$.

Letztendlich vertiefen wir Proposition [18], indem wir auf ihr basierend ein zu [15] korrespondierendes Ergebnis für G_2 nachweisen.

Satz [19] *Sei $\tilde{\Phi}$ ein Wurzelsystem vom Typ G_2 und sei G eine Gruppe, die (S) bezüglich G_2 erfüllt. Dann gilt:*

(1) $\tilde{\Phi} = \dot{\bigcup} \Psi_i$, *wobei* Ψ_i *die Struktur eines Wurzelsystems vom Typ* G_2, A_2, A_3 *oder* C_2 *trägt oder* $\Psi_i = \{\pm r_i\}$ *für ein* $r_i \in \tilde{\Phi}$ *ist.*
(2) *Die Gruppe* G *ist das zentrale Produkt der Untergruppen* $G(\Psi_i)$, *wobei* $G(\Psi_i)$ *vom Typ* Ψ_i *ist oder* $G(\Psi_i) = X_{r_i}$.

Es ist etwas überraschend, dass auch der Typ A_3 in Erscheinung tritt. In diesem Fall ist ein zentraler Faktor vom höheren Rang als das zugrundeliegende Wurzelsystem, was wiederum an F_4 erinnert, da $G(F_4)$ einen zentralen Faktor vom Typ A_5 haben kann. Sei

$$\tilde{\Phi}_0 = \{\pm R, \pm S, \pm T, \pm(R+S), \pm(S+T), \pm(R+S+T)\}$$

ein Wurzelsystem vom Typ A_3. Wir indizieren die Wurzeluntergruppen folgendermaßen um (s. [Mü05]):

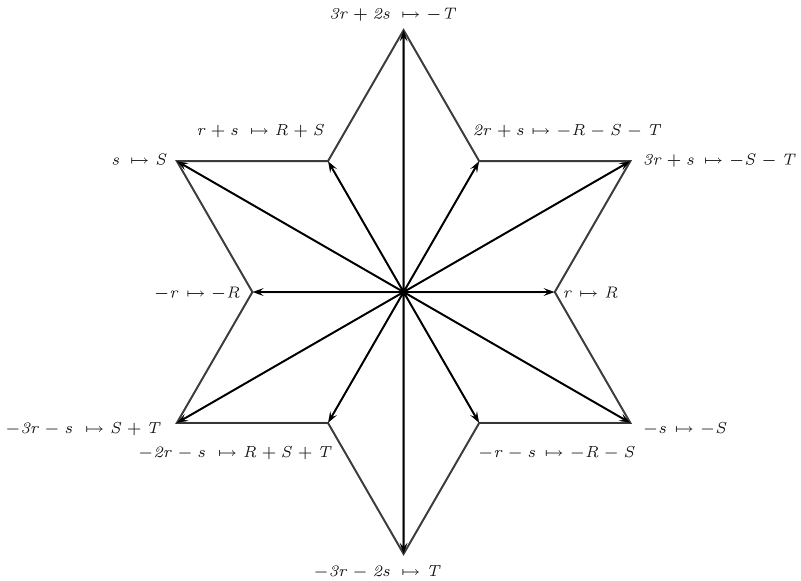

Abb. 5: *Das Schema der Umindizierung.*

Einerseits gilt $i\alpha + j\beta \in \tilde{\Phi}$ für $\alpha, \beta \in \tilde{\Phi}_0$ mit $\beta \neq -\alpha$ und $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i\alpha + j\beta \in \tilde{\Phi}_0$, wenn wir α und β als Wurzeln in $\tilde{\Phi}$ betrachten. Andererseits spannt ein Wurzelsystem vom Typ A_3 einen höherdimensionalen Vektorraum als eines vom Typ G_2 auf. Infolgedessen liegen zwischen zwei Wurzeln in $\tilde{\Phi}$ möglicherweise mehr Wurzeln der Form $i\alpha + j\beta$ als zwischen den entsprechenden in $\tilde{\Phi}_0$. So ist es möglich, dass (I) bezüglich $\tilde{\Phi}$ nicht, aber bezüglich $\tilde{\Phi}_0$ immer mit Gleichheit erfüllt ist. In diesem Fall ist G nach [6] vom Typ $\tilde{\Phi}_0$. Eine konkrete Realisierung hierfür ist $A_3(K) \simeq SL_4(K)$ mit einem Körper K.

Wir weisen ein mit [18] vergleichbares Ergebnis für ${}^2F_4$ nach.

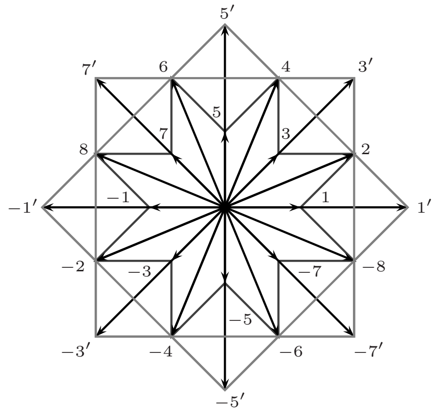

Abb. 6: *Das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ vom Typ ${}^2F_4$.*

Unsere Behauptung über die mögliche Struktur von G mit $\tilde{\Phi} = {}^2F_4$ lautet wie folgt:

Satz [20] *Sei $\tilde{\Phi}$ ein Wurzelsystem vom Typ ${}^2F_4$ und sei G eine Gruppe, die (S) bezüglich $\tilde{\Phi} = {}^2F_4$ genügt. Außerdem sei $A_{\alpha'}$ Untergruppe von A_α für $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$. Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*
(A) Die Gruppe G ist vom Typ ${}^2F_4$.
(B) Es gilt

$$G = X_\alpha * C_G(X_\alpha)$$

für ein $\alpha \in \Phi$ und $X_\beta \leq C_G(X_\alpha)$ für $\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$ oder

$$G = G(\Psi) * G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$$

ist vom Typ $C_2 \times C_2$.

Es sei bemerkt, dass die A_α, $\alpha \in \Psi$ in dem Fall von (A) allesamt elementarabelsche 2-Gruppen sind. Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf die Wurzeluntergruppen A_α, $\alpha \in \tilde{\Phi} \setminus \Phi$. In dieser Situation ergibt sich sogar $a^4 = 1$ für jedes $a \in A_\beta$, $\beta \in \Phi \setminus \Psi$. Dies deckt sich mit den Eigenschaften der zu Moufang-Achtecken assoziierten bzw. zusätzlich eingeführten Wurzeluntergruppen (vgl. [Tits94]).

Literatur

[Bour02] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras, Chapters 4-6*, Springer, 2002.

[Car72] R. W. Carter, *Simple Groups of Lie-Type*, John Wiley & Sons, 1972.

[Hum90] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.

[KS98] H. Kurzweil und B. Stellmacher, *Theorie der endlichen Gruppen*, Springer, 1998.

[Mal98] H. van Maldeghem, *Generalized Polygons*, Monogr. Math., Vol. 93, Birkhäuser, 1998.

[Mü02] C. Müller, *On the Steinberg presentation for Lie-type groups of type C_2*, J. Alg. **252**, 150-160 (2002).

[Mü05] C. Müller, *Groups with root system of type G_2*, eingereicht bei J. Alg. (2005).

[St67] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Yale University (1967).

[Tim98] F. G. Timmesfeld, *Presentations for certain Chevalley groups*, Geom. Ded. **73**, 85-117 (1998).

[Tim00] F. G. Timmesfeld, *Structure and Presentations of Lie-type-groups*, Proc. Lond. Math. Soc. **81**, 428-484 (2000).

[Tim01] F. G. Timmesfeld, *Abstract Root Subgroups and Simple Groups of Lie-Type*, Monogr. Math., Vol. 95, Birkhäuser, 2001.

[Tim02a] F. G. Timmesfeld, *A remark on presentations of certain Chevalley groups*, Arch. Math. **79**, 404-407 (2002).

[Tim02b] F. G. Timmesfeld, *Groups with a central factor of Lie type*, J. Alg. **257**, 528-559 (2002).

[Tim03a] F. G. Timmesfeld, *On the Steinberg-Presentation for Lie-Type-Groups*, Forum Math. **15**, 645-663 (2003).

[Tim03b] F. G. Timmesfeld, *Groups with Root-System of Type BC_l*, Constributions to Algebra and Geometry, **44**, 213-227 (2003).

[Tim05a] F. G. Timmesfeld, *Groups with root system of type B_l, C_l or F_4*, J. Alg. **284**, 737-754 (2005).

[Tim05b] F. G. Timmesfeld, *Steinberg-type presentation for Lie-type groups*

[Tits74] J. Tits, *Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs*, Lecture Notes in Mathematics **386**, Springer (1974).

[Tits76] J. Tits, *Non-existence de certains polygones généralisés, I*, Inventiones mathematicae **36**, 275-284, Springer (1976).

[Tits77] J. Tits, *Endliche Spiegelungsgruppen, die als Weylgruppen auftreten*, Inventiones mathematicae **43**, 283-295, Springer (1977).

[Tits83] J. Tits, *Moufang octagons and the Ree Groups of type ${}^2F_4$*, Amer. J. Math. **105**, 539-594 (1983).

[Tits94] J. Tits, *Moufang polygons I: Root data*, Bull. Belg. Math. Soc. **1**, 455-468 (1994).

[TW02] J. Tits und R. M. Weiss, *Moufang polygons*, Monogr. Math., Springer, Berlin, 2002

[Weiss79] R. Weiss *The nonexistence of Certain Moufang Polygons*, **51**, 261-266, Springer (1979)