Aufgaben zur Vorlesung
Vertiefung Mathematik I für NWI
Sommersemester 2007

D. Frettlöh
S. Selle

Abgabe: Mittwoch, 02.05.2007, 8:30 Uhr
Übungsgruppen: Di. 12-14, Di. 14-16, Postfach: UV5–1829 (Thomas Regier)
Di. 10-12, Postfach: UV5–1822 (Sabrina Selle)

Aufgabe 10:

Beweisen Sie, dass die Aufgabe

$$u'(t) = u^2(t) - \frac{1}{6}t^2, \quad u(0) = 0 \tag{1}$$

genau eine Lösung in $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \times [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ besitzt.

Nach wie vielen Schritten (k) der Picard-Iteration approximiert v_k die Lösung von (1) bis auf einen Fehler von 10^{-1} ?
Hinweis: Verwenden Sie die entsprechende Abschätzung aus dem Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf.

(6 Punkte)

Aufgabe 11:

Untersuchen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf, welche der folgenden Anfangswertaufgaben zumindest lokal eine eindeutige Lösung besitzen:

(a) $u'(t) = \sqrt{|u(t)|}$, $u(0) = 1$,

(b) $u'(t) = \sin(u(t)) - \cos(u(t))$, $u(0) = -1$,

(c) $u'(t) = |1 + u(t)|^{2/3}$, $u(0) = -1$,

(d) $u'(t) = e^{-t^2} + u^2(t)$, $u(1) = 0$,

(e) $u'(t) = 3\sin(2tu(t))$, $u(0) = 0$,

(f) $u'(t) = \cos(2tu(t))|u(t)|^{\frac{1}{3}}$, $u(0) = 0$.

(6 Punkte)

— Bitte wenden —

Aufgabe 12:

(a) Zeigen Sie, dass die zwei-dimensionale Anfangswertaufgabe

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos(tu_2) \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ eine eindeutige Lösung besitzt.

(b) Man bestimme das größtmögliche Intervall, auf dem nach dem Satz von Picard-Lindelöf die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = 1 + u^2(t), \quad u(0) = 0$$

erklärt ist.

(6 Punkte)