WS2011/12 & SS2012

PD W. Hoh

Mathematik für Naturwissenschaften

Lineare Algebra I & II

von Kai Zander

Inhalt

1. Algebraische Grundstrukturen

Neutrales Element
Das Element, das bei der Verknüpfung keine Wirkung zeigt (Bei Addition/Subtraktion 0, bei Multiplikation/Division 1).
Zum Beispiel: $a * \mathrm{nE} = a$.

Inverses Element
Das Element, das bei der Verknüpfung das neutrale Element ergibt (Bei Addition $-a$, bei Subtraktion a, bei Multiplikation a^{-1}, bei Division a).
Zum Beispiel: $a * \mathrm{iE} = \mathrm{nE}$.

Beim Rechnen mit Zahlen gelten bekannte Regeln, zum Beispiel

Assoziativgesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

und

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Kommutativgesetz

$$a + b = b + a$$

und

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Die inverse Operation zur **Addition**: Die **Subtraktion** $b - a$.
Dies lässt sich so umformulieren:
Es gibt ein **neutrales Element**, genannt 0, mit der Eigenschaft

$$a + 0 = 0 + a = 0,$$

und zu a ein **inverses Element**, genannt $-a$, mit der Eigenschaft

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

Dann ist

$$b - a \coloneqq b + (-a).$$

Ebenso für die Multiplikation:
Es gibt ein **neutrales Element**, genannt 1, mit

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = 0,$$

und zu a ein **inverses Element**, genannt a^{-1} oder $\frac{1}{a}$, mit

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Die **Division** ist dann definiert durch

$$\frac{a}{b} \coloneqq a \cdot b^{-1}.$$

Man betrachtet nun allgemeiner: Grundmenge G mit einer Verknüpfung, das heißt Abbildung

$$\begin{aligned} *: G \times G &\to G \\ (a,b) &\mapsto a * b. \end{aligned}$$

1.1. Definition

$(G,*)$ heißt **Gruppe**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(i) **Assoziativgesetz**
$(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a, b, c \in G$.

(ii) **Neutrales Element**
Es gibt ein Element $0 \in G$ mit $a * 0 = 0 * a = a$, $\forall a \in G$.

(iii) **Inverses Element**
Zu jedem $a \in G$ gibt es ein inverses Element $-a \in G$ mit $a * (-a) = (-a) * a = 0$.

Die Gruppe heißt **abelsch**, wenn zusätzlich das Kommutativgesetz gilt:

$$a * b = b * a, \forall a, b \in G$$

1.2. Beispiele

(i) $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe: Kein Neutrales Element.
(ii) $(\mathbb{N}_0, +)$ ist keine Gruppe: Kein Element außer der 0 besitzt ein inverses Element.
(iii) $(\mathbb{N}, \cdot)$ ist keine Gruppe: Besitzt neutrales Element 1, aber kein Element außer der 1 hat ein inverses Element.
(iv) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sind abelsche Gruppen.
(v) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe: Neutrales Element 1, aber außer zu 1 und -1 kein inverses Element.
(vi) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist keine Gruppe: Neutrales Element 1, aber 0 besitzt kein inverses Element.
(vii) Mit $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ abelsche Gruppen.

1.3. Permutationsgruppe

S_n mit $n \in \mathbb{N}$ ist ein Beispiel einer nicht-abelschen Gruppe.
Betrachte: Menge mit n Elementen, zum Beispiel $\{1, 2, \dots, n\}$ und alle Permutationen (Umordnungen) dieser Menge.

Das heißt die Menge aller Abbildungen $f: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ die umkehrbar, das heißt bijektiv sind.

Von diesen Abbildungen gibt es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ Stück.
Mögliche Schreibweise bei $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_n := \{\text{Alle Permutationen von } \{1, \dots, n\}\}$$

Verknüpfung:

$$\begin{aligned} S_n \times S_n &\to S_n \\ (f, g) &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

Komposition:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Zum Beispiel mit $n = 3$:
$f, g \in S_3$ gegeben durch

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

also ist $f \circ g$ wieder Permutation (bijektiv, siehe Übung 01).

Dann erfüllt $(S_n,\circ)$ die Gruppenaxiome:

Assoziativgesetz

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

gilt stets für Kompositionen von Abbildungen (vergleiche Analysis I).

Identische Abbildung (neutrales Element)

$$\begin{aligned} \mathrm{id}: \{1, \dots, n\} &\to \{1, \dots, n\} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(also $\mathrm{id}(1) = 1, \mathrm{id}(2) = 2, \dots, \mathrm{id}(n) = n$).

$$\Rightarrow \mathrm{id} \in S_n \text{ und } \mathrm{id} \circ f = f \circ \mathrm{id} = f$$

Inverses Element zu $f \in S_n$
Umkehrabbildung f^{-1} mit

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$$

Kommutativgesetz gilt nicht (nicht abelsch)
Für $n \geq 3$ ist S_n nicht abelsch, zum Beispiel mit f, g wie oben:

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ aber } g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$$

1.4. Bemerkung

In einer Gruppe $(G,*)$ sind die Gleichungen

$$a * x = b, \text{ bzw. } y * a = b$$

stets eindeutig nach x bzw. y lösbar, nämlich durch

$$x = (-a) * b, \text{ bzw. } y = b * (-a),$$

denn

$$\begin{aligned} & (-a) * (a * x) = (-a) * b \\ \Rightarrow\ & \big((-a) * a\big) * x = (-a) * b \\ \Rightarrow\ & 0 * x = (-a) * b \\ \Rightarrow\ & x = (-a) * b \end{aligned}$$

1.5. Ringe und Körper

Definition
Ein **Ring** $(R, +,\cdot)$ ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen, genannt
Addition

$$\begin{aligned} +: R \times R &\to R \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

und Multiplikation

$$\begin{aligned} \cdot: R \times R &\to R \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b. \end{aligned}$$

Die folgenden Rechenregeln (Axiome) genügen:

(i) $(R, +)$ ist abelsche Gruppe (mit neutralem Element der Addition)
(ii) $(R,\cdot)$ erfüllt:
Assoziativgesetz

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Existenz eines neutralen Elements der Multiplikation

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

(iii) Es gelten die Distributivgesetze
1.

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

2.

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

R heißt kommutativ, wenn die Multiplikation das Kommutativgesetz $a \cdot b = b \cdot a$ erfüllt.

Ist $(R \setminus \{0],\cdot)$ sogar eine abelsche Gruppe, so heißt $(R, +,\cdot)$ ein **Körper**.

1.6. Beispiele

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring, aber kein Körper.
$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper.

1.7. Folgerungen aus den Ring-Axiomen

In jedem Ring gilt

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0,$$

denn

$$\begin{aligned} 0 \cdot a = (0+0) \cdot a &= 0a + 0a \\ \Leftrightarrow 0 &= 0a \end{aligned}$$

$$(-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x$$

Beachte
(-1) ist inverses Element bezüglich der Addition und das neutrale Element bezüglich der Multiplikation:

$$\begin{aligned} &(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y) \\ \Leftrightarrow\ &(-x)(-y) = x \cdot y \end{aligned}$$

1.8. Restklassen Modulo n

Sei $n \in \mathbb{N}$, $z \geq 2$.

Definition
Man sagt: Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ sind **kongruent Modulo n**, wenn sie beim Teilen durch n denselben Rest lassen. In Zeichen:

$$a \equiv b \bmod n \Leftrightarrow a - b \text{ ist Vielfaches von } n.$$

Oder mit Bezeichnung

$$n\mathbb{Z} = \{x = n \cdot z \text{ für } z \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}.$$

Zu gegebenem n zerfällt $\mathbb{Z}$ in n Restklassen, bezeichnet mit $\bar{0}$: Klasse aller $z \in \mathbb{Z}$, die beim Teilen durch n Rest 0 lassen (das heißt durch n teilbar sind).

Somit analog:
$\bar{1}$: Klasse der $z \in \mathbb{Z}$, die beim Teilen durch n Rest 1 lassen.
$\vdots$
$\overline{n-1}$: Klasse der $z \in \mathbb{Z}$, die beim Teilen durch n Rest $n-1$ lassen.

Zum Beispiel $n = 2$:
$\bar{0}$: Klasse aller geraden Zahlen.
$\bar{1}$: Klasse aller ungeraden Zahlen.

Oder $n = 5$:
Zur Restklasse $\overline{1}$ gehören zum Beispiel $1,6,11,16,-4,-9,-14,\ldots$
Zur Restklasse $\overline{3}$ gehören zum Beispiel $3,8,13,88,-2,-12,-27,\ldots$

Nun gilt
Addiert oder multipliziert man zwei ganze Zahlen aus zwei Restklassen $\bar{a}$ und $\bar{b}$, so liegt das Ergebnis stets in derselben Restklasse, unabhängig von der Wahl des jeweiligen Vertreters aus den Restklassen $\bar{a}$ bzw. $\bar{b}$.

Beispiel
$n = 5$:

Es sind 2 und 27 in der Restklasse $\overline{2}$.
Es sind 4 und 9 in der Restklasse $\overline{4}$.
Und es sind $2 \cdot 4 = 8$ und $27 \cdot 9 = 243$ in der Restklasse $\overline{3}$.

In der Tag folgt für $a \equiv b \bmod n$ und $c \equiv d \bmod n$, dass

$$a + c \equiv b + d \bmod n$$
$$a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod n.$$

Dies gilt, weil:

$$b = a + k_1 \cdot n, d = c + k_2 \cdot n$$

für geeignete $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow b + d = a + k_2 \cdot n + c + k_2 \cdot n = a + c + \underbrace{(k_1 + k_2) \cdot n}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$\begin{aligned} b \cdot d &= (a + k_1 \cdot n) \cdot (c + k_2 \cdot n) = a \cdot c + a \cdot k_2 \cdot n + k_1 \cdot n \cdot c + k_1 k_2 n^2 \\ &= a \cdot c + \underbrace{a \cdot k_2 + c \cdot k_1 + k_1 k_2 \cdot n}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Es ist daher sinnvoll, Addition und Multiplikation von Restklassen zu definieren:

$$\overline{v_1} + \overline{v_2} := \overline{v_1 + v_2}$$

(Das Ergebnis ist die Restklasse des Ergebnisses der Rechnung mit zwei Repräsentanten der Ausgangsklassen.)
Da sich die Rechengesetze des kommutativen Rings $\mathbb{Z}$ auf die Restklassen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ übertragen, gilt:

1.9. Satz

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein kommutativer Ring.

Beispiel

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann gibt es $\overline{0}$ und $\overline{1}$.

Additionstabelle

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

Entspricht dem logischen Operator XOR (exclusive OR).

Multiplikationstabelle

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Entspricht dem logischen Operator AND.

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Dann gibt es $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ und $\overline{3}$.

Additionstabelle

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Multiplikationstabelle

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

In $\mathbb{Z}$ gilt stets:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \Rightarrow \overline{0} \Rightarrow \bar{a} = \overline{0} \text{ oder } \bar{b} = \overline{0}.$$

Anders zum Beispiel in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: $2 \cdot 2 \equiv 0 \bmod 4$.

Man sagt:

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist nicht **nullteilerfrei**.

$\mathbb{Z}$ und jeder Körper ist **nullteilerfrei**.

1.10. Anwendungen

(i) Sei $n = 3$.
Es gilt $10 \equiv 1 \bmod 3$.

$$\Rightarrow 10 = \underbrace{10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n \text{ mal}} = \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n \text{ mal}} \equiv 1 \bmod 3$$

Liefert für $z \in \mathbb{Z}$ in Dezimaldarstellung mit Ziffern $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0,1,\ldots,9\}$

$$\begin{aligned} z &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \\ &\equiv a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0 \\ &\equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \bmod 3 \end{aligned}$$

Das heißt z und die Quersumme von z lassen beim Teilen durch 3 denselben Rest.
Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

(ii) **Frage**
Kann die Zahl 1234567 die Summe von zwei Quadratzahlen sein?

Antwort
Nein. Denn:
Rechne $\bmod 4$: Es ist $1234567 \equiv 3 \bmod 4$.
Nun gilt:

$$\left.\begin{aligned} \overline{0}^2 &= \overline{0} \\ \overline{1}^2 &= \overline{1} \\ \overline{2}^2 &= \overline{0} \\ \overline{3}^2 &= \overline{1} \end{aligned}\right\} \bmod 4$$

$\Rightarrow$ alle Quadratzahlen sind in $\overline{0}$ oder $\overline{1} \bmod 4$.
$\Rightarrow$ Summen von zwei Quadratzahlen sind $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2} \bmod 4$, nie $\overline{3}$.

Wir hatten gegeben: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ kann kein Körper sein, da nicht **nullteilerfrei**.
Es gilt allgemeiner:

Ist n keine Primzahl, so gibt es Zahlen $r, s \in \mathbb{N}$ mit $1 < r, s < n$, so dass $r \cdot s = n$.
Also ist $r \cdot s \equiv 0 \bmod n$ und somit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ kein Körper.

Was passiert, wenn $n = p$ Primzahl ist? Zum Beispiel $n = 7$.
Gesucht: Inverses Element zu $\overline{3}$:

Vielfache von $\overline{3}$:

$$\left.\begin{aligned} \overline{1} \cdot \overline{3} &= \overline{3} \bmod 7 \\ \overline{2} \cdot \overline{3} &= 6 \bmod 7 \\ \overline{3} \cdot \overline{3} &= 9 \bmod 7 \\ \overline{4} \cdot \overline{3} &= 2 \bmod 7 \\ \overline{5} \cdot \overline{3} &= 1 \bmod 7 \\ \overline{6} \cdot \overline{3} &= 4 \bmod 7 \\ \overline{7} \cdot \overline{3} &= 0 \bmod 7 \end{aligned}\right\} \text{Alle Restklassen vorhanden}$$

Es gilt allgemein:
Sei p prim: Suche inverses Element zu $1 \leq r \leq p-1 \Rightarrow 1 \leq k \leq p-1$:

$k - r$ ist kein Vielfaches von p, da k und r teilerfremd zu p sind. Das heißt $k \cdot r \not\equiv 0 \bmod p$.

Ebenso gilt für $1 \leq k_1 < k_2 \leq p-1$:

$$k_2 \cdot r - k_2 \cdot 3 = (k_2 - k_1) \cdot r \not\equiv 0 \bmod p,$$

das heißt

$$k_1 \cdot r \not\equiv k_2 \cdot r \bmod p.$$

Es gilt dabei

$$1 \leq (k_1 - k_1) \leq p - 1.$$

Also heißen die Vielfachen $1 \cdot r, 2 \cdot 3, \dots, (p-1) \cdot r$.

Zerfallen in $p-1$ verschiedene Restklassen, keine davon ist die $\overline{0}$.
Eine muss die Restklasse $\overline{1}$ sein, womit wir das inverse Element r^{-1} gefunden haben.

Somit gilt:

1.11. Satz

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

1.12. Polynomringe

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$.
Dann heißt ein Ausdruck der Gestalt

$$p \coloneqq P(x) \coloneqq a_n x^n + a_{(n-1)} x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

ein **Polynom** mit **Koeffizienten** $a_0, \dots, a_n$ vom Grad $\operatorname{grad} p \coloneqq n$.

Nullpolynom
$p \coloneqq 0$, alle Koeffizienten Null: $\operatorname{grad} 0 \coloneqq -\infty$.

Wir bezeichnen die Menge aller reellen Polynome mit $\mathbb{R}[x]$.
Allgemeiner kann man Polynome mit Koeffizienten in einem beliebigen Körper K betrachten und schreibt dann $K[x]$.

Addition:

$$(a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0) + (b_n x^n + \dots + b_1 x^1 + b_0)$$
$$= (a_n + b_n) x^n + \dots + (a_1 + b_1) x^1 + a_0 + b_0$$

Multiplikation:

$$(a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0) \cdot (b_m x^m + \dots + b_1 x^1 + b_0)$$
$$= a_n b_m x^{m+n} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{m+n-1} + \dots + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0$$

1.13. Satz

$([x], +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Nullelement Nullpolynom und Einselement $p(x) = 1$.
Wie in $\mathbb{Z}$ gibt es in $K[x]$ (dem Polynomring) **Division mit Rest**.
Zum Beispiel:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2) \div (x^2 + x) = x^2 + 2x - 1 \\
-\underline{(x^4 + x^3)} \\
\quad 2x^3 + x^2 \\
\quad -\underline{(2x^3 + 2x^2)} \\
\qquad -x^2 + 3x \\
\qquad -\underline{(-x^2 - x)} \\
\qquad\quad 4x + 2 \leftarrow \text{Rest}
\end{array}
$$

Das heißt,

$$x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2 = (x^2 + x) \cdot (x^2 + 2x - 1) + 4x + 2$$

Das heißt es gilt:

1.14. Satz

Zu $f, g \in K[x]$, $g \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[x]$ mit

$$\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} g \text{ mit } f = q \cdot g + r.$$

Folgerung
Für $f \in K[x]$ und $a \in K$ gilt $f(a) = 0$ genau dann, wenn f durch $x - a$ ohne Rest teilbar ist (das heißt $f(x) = q(x) \cdot (x - a)$ für ein $q \in K[x]$).
Denn:
„⇒“:
Wenn die Division $f(x) = q(x) \cdot (x - a) \Rightarrow f(a) = 0$.

„⇐“:
Es ist $f(x) = q(x) \cdot (x - 1) + r(x)$ mit $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad}(x - a) = 1$. Also $r(x) = r$ konstant.

Aber für $x = a$ folgt $0 = f(a) = q(a) \cdot (a - a) + r = r$, also ist $r = 0$.
Das heißt, $f(x) = q(x) \cdot (x - a) + 0$ (kein Rest, Nullstelle).

Wie in $\mathbb{Z}$ kann man i $K[x]$ mit Restklassen rechnen.

Sei $f \in K[x]$, $f \neq 0$ ein Polynom.
Wir sagen für zwei Polynome $g_1, g_2 \in K[x]$:

$$g_1 \equiv g_2 \bmod f,$$

wenn g_1 und g_2 beim Teilen durch f denselben Rest lassen.

Äquivalent: Wenn $g_1 - g_2$ ein Vielfaches von f ist, das heißt wenn

$$g_1 - g_2 = q \cdot f$$

für ein Polynom $q \in K[x]$.

Jede Restklasse besitzt als Repräsentanten genau ein Polynom vom Grad $<$ grad f.

Anwendung: Codierung mit Polynomen
Zu übertragen: **Bitstring** der Länge k:

$$(m_1, m_2, \dots, m_k) \text{ mit } m_i \in \{0,1\}.$$

Übertrage Codewort der Länge $n > k$, um Übertragungsfehler zu erkennen (also $n - k$ zusätzliche Bits, das heißt mit Redundanz).

Bekanntes und häufig verwendetes Verfahren:
Cyclic Redundancy Check (CRC)
Identifiziere hierzu $\{0,1\}$ mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ und Bitstring mit **Polynom** in $\mathbb{Z}_2[x]$:

$$m(x) := m_1 x^{k-1} + m_2 x^{k-2} + \cdots + m_{k-1} x + m_k$$

vom Grad grad $m \leq k - 1$.
Verwende standardisiertes **Generatorpolynom** $g(x)$ vom Grad grad $g = n - k$ (zum Beispiel $g(x) = x^{16} + x^{15} + x^2 + 1 \rightarrow$ CRC-16).

Bilde nun

$$x^{n-k} \cdot m(x) \leftrightarrow (m_1, m_2, \dots, m_k, 0, \dots, 0).$$

Also die Koeffizienten um $n - k$ Stellen nach links schieben und rechts mit Nullen auffüllen.
Dividiere dieses Polynom durch $g(x)$ mit Rest, also

$$x^{n-k} \cdot m(x) = b(x) \cdot g(x) + r(x)$$

(das heißt $r(x)$ ist Restklasse von $x^{n-k} \cdot m(x)$ beim Rechnen Modulo $g(x)$) und sende

$$\begin{aligned} b(x) \cdot g(x) &= x^{n-k} \cdot m(x) - r(x) \\ &= x^{n-k} \cdot m(x) + r(x) \end{aligned}$$

(beachte: In $\mathbb{Z}_2$ ist $1 = -1$).
Sende also den Bitstring (beginnend mit Koeffizient höchster Ordnung)

$$(\underbrace{m_1, m_2, \dots, m_k}_{\text{Nutzdaten}}, \underbrace{r_1, r_2, \dots, r_{n-k}}_{\substack{\text{Koeff. von } r(x) \\ = \text{Checksumme}}})$$

Es sei $d(x)$ das Polynom des empfangenen Bitstrings.

Berechne $f(x) \bmod g(x)$. Wenn Übertragung fehlerfrei, muss der Rest bei Division 0 sein:

1. Fall
$d(x) \not\equiv 0 \bmod g(x) \Rightarrow$ Übertragungsfehler.
2. Fall
$d(x) \equiv 0 \bmod g(x) \Rightarrow$ Übertragung kann, muss aber nicht korrekt sein (sicher richtig, wenn maximal ein Bit falsch).

Man wähle ein möglichst günstiges Generatorpolynom, um viele Fehler zu erkennen.

Sei nun $f \in K[x]$, $f \neq 0$. Dann bezeichnet $K[x]/fK[x]$ die Menge der Restklassen Modulo f.
Wie für Restklassen ganzer Zahlen gilt für Restklassen von Polynomen $g_1, g_2, h_1, h_2 \in K[x]$:

$$g_1 \equiv g_2 \bmod f \text{ und } h_1 \equiv h_2 \bmod f$$
$$\Rightarrow g_1 + h_1 \equiv h_2 + h_2 \bmod f \text{ und } g_1 \cdot h_1 \equiv g_2 \cdot h_2 \bmod f$$

Sonst: Bezeichnet $\bar{g}$ die Restklasse eines Polynoms $g \in K[x]$, so definiert

$$\bar{g} + \bar{h} = \overline{g + h}$$
$$\bar{g} \cdot \bar{h} = \overline{g \cdot h}$$

eine Addition und eine Multiplikation auf $K[x]/fK[x]$ und $(K[x]/fK[x], +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring.
Wann ist $K[x]/fK[x]$ ein Körper?
Was ist das Analogon zu Primzahlen in $K[x]$?

Definition
Ein Polynom $f \in K[x]$ heißt **reduzibel**, wenn es zwei Polynome g_1, g_2 gibt mit
$$\operatorname{grad} g_1 = \operatorname{grad} g_2 = 1,$$
so dass
$$g_1 \cdot g_2 = f.$$

Ansonsten heißt es **irreduzibel**.

Denn wäre f reduzibel, so gäbe es wegen $\operatorname{grad} f = 2$ zwei Polynome $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}_2[x]$ vom Grad 1, das heißt
$$g_1 = x - a_1,\ g_2 = x - a_2,$$
so dass
$$f = g_1 \cdot g_2.$$
Dann sind a_1, a_2 Nullstellen von f.
Aber:
$$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 1,$$

das heißt, f hat keine Nullstellen.

1.15. Satz

$K[x]/fK[x]$ ist genau dann ein Körper, wenn f irreduzibel ist.

Beispiel
Wie oben $K = \mathbb{Z}_2, f = x^2 + x + 1$.

Natürliche Repräsentanten der Restklassen sind Polynome vom Grad ≥ 1.

$$a_1 x + a_0,\, a_1 \in \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$$

$\rightarrow 4$ Restklassen:

$\overline{0}$ Nullpolynom ($=$ Nullelement von K)
$\overline{1}$ Konstant Eins ($=$ Einselement von K)
$\overline{x}$ und $\overline{x+1}$.

Additionstabelle

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{x+1}$	$\overline{x}$
$\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{x+1}$	$\overline{x+1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Multiplikationstabelle

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$	$\overline{1}$
$\overline{x+1}$	$\overline{0}$	$\overline{x+1}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$

Es gilt

$$\begin{array}{rlll} x \cdot x = x^2 & \equiv x^2 + x + 1 + x + 1 & \equiv x + 1 & \mathrm{mod}\; x^2 + 1 + 1 \\ x \cdot (x+1) = x^2 + x & \equiv x^2 + x + 1 + 1 & \equiv 1 & \mathrm{mod}\; x^2 + x + 1 \\ (x+1) \cdot (x+1) = x^2 + x + x + 1 & & \equiv x & \mathrm{mod}\; x^2 + x + 1 \end{array}$$

$K[x]/fK[x]$ Körper $\Rightarrow f$ ist irreduzibel.

$K = \mathbb{Z}_2, f = x^2 + x + 1 \rightarrow$ Körper mit 4 Elementen $\overline{0}, \overline{1}, \overline{x}, \overline{x+1}$.
Dieser Körper heißt üblicherweise $GF(2^2) = GF(4)$ „Galois Field“.
Die Auswahl der Elemente eines endlichen Körpers ist stets eine Primzahlpotenz p^n. Man erhält einen solchen Körper, indem man im Polynomring $\mathbb{Z}_p[x]$ ein irreduzibles Polynom f der Ordnung n wählt und Restklassen Modulo f betrachtet:

$$\mathbb{Z}_p[x]/f\mathbb{Z}_p[x] = GF(p^n)$$

Zum Beispiel $p = 2, n = 8$:
In $\mathbb{Z}_2[x]$ ist $f := x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$ irreduzibel.

$\Rightarrow \mathbb{Z}_2[x]/f\mathbb{Z}[x] = GF(256)$ mit $p^n = 2^8 = 256$ Elementen (= Restklassen) dargestellt durch Polynome vom Grad ≤ 7:

$$a_7x^7 + \cdots + a_1x^1 + a_0 \text{ mit } a_7, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}_2 = \{0,1\} \mathrel{\widehat{=}} (a_7, \dots, a_0) \text{ Byte.}$$

Anwendung: Reed-Solomon-Code
Zu übertragen: Byte-Folge

$$m_1, \dots, m_k \text{ mit } m_i \in K = GF(256).$$

Zugeordnetes Polynom in $K[x]$:

$$p(x) = m_1x^{k-1} + m_2x^{k-1} + \cdots + m_k$$

Übertrage nun nicht $m_1, \dots, m_k$, sondern diverse Funktionswerte von $p(x)$:

$$\big(p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)\big) \text{ mit } x_i \in K = GF(256)$$

und $n > k$ (das heißt Redundanz von $n - k$ Bytes).
Nun gilt:
Aus je k der Funktionswerte kann das Polynom $p(x)$ (durch Interpolation) rekonstruiert werden).

→ Bis zu $n - k$ Bytes dürfen bei der Übertragung verloren gehen,

Mehr noch:
Ist die Anzahl der fehlerhaft übertragenen Bytes $\leq \frac{1}{2}(n - k)$, so lässt sich das korrekte Polynom zurückgewinnen. → Fehlerkorrektur-Code (FKC/FCC).

2. Der n-Dimensionale Raum

Descartes: „Identifiziere Punkte in der Ebene mit Zahlenpaaren". → Algebraisierung der Geometrie.

x und y heißen die **Koordinaten** vom Punkt P.

Die Menge aller Punkte in der Ebene entspricht allen Zahlenpaaren, das heißt

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\,\}$$

ist das Modell der Ebene.
Analog: $\mathbb{R}^3$: $\{\, (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\,\}$ Die Tripel aller reellen Zahlen ist das Modell des dreidimensionalen Raums.

Ebenso: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$: Zahlenstrahl. Modell der Geraden im eindimensionalen Raum.

Allgemeiner

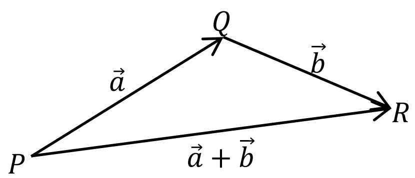
$$\mathbb{R}^n = \{\,(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\,\} \text{ ist } n\text{-dimensionaler Raum.}$$

Vektoren im n-dimensionalen Raum:

Freier Vektor
Beschreibt Verschiebung im Raum.
Ortsvektor
An festen Ursprung angeheftet.

Jeder Vektor beschreibt einen Punkt im Raum.

Vektoren kann man durch Aneinanderhängen **addieren**:



In Koordinaten:
$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Im Folgenden wird auf die Vektorschreibweise $\vec{x}$ verzichtet und als x dargestellt.

Allgemeiner
Addition in $\mathbb{R}^n$:

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\Rightarrow a + b \coloneqq (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$$

2.1. Satz

$(\mathbb{R}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(i) Assoziativgesetz folgt aus $(\mathbb{R}, +)$.

(ii) Neutrales Element: Nullvektor $\vec{0} = \mathcal{O} = 0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) + (0, \dots, 0) &= (a_1 + 0, \dots, a_n + 0)\\ &= (a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0) + (a_1, \dots, a_n)\end{aligned}$$

(iii) Inverses Element zu $a = (a_1, \dots, a_n)$:

$$-a \coloneqq (-a_1, \dots, -a_n)$$

$$\begin{aligned}(-a) + a &= (-a_1, \dots, -a_n) + (a_1, \dots, a_n)\\ &= (-a_1 + a_1, \dots, -a_n + a_n) = (0, \dots, 0) = \vec{0} = a + (-a)\end{aligned}$$

(iv) Kommutativgesetz:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = (b_1, a_1, \dots, b_n + a_n)$$
$$= (b_1, \dots, b_n) + (a_1, \dots, a_n)$$

Vektoren kann man mit Skalaren (eindimensionale Körperelemente) **multiplizieren**. Dies resultiert in Streckung bzw. Stauchung von Vektoren.

Ist a ein Vektor, so ist für

$\lambda \geq 0$, $\lambda \cdot a$ ein Vektor mit gleicher Richtung wie a und mit λ-facher Länge,
$\lambda < 0$: $\lambda \cdot a$ ein Vektor mit entgegengesetzter Richtung und $|\lambda|$-facher Länge.

In Koordinaten mit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot (a_1, \dots, a_n) := (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$$

definiert Verknüpfung

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (\lambda, a) &\mapsto \lambda a \end{aligned}$$

2.2. Rechenregeln

Distributivgesetze für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$:

(i) $\lambda \cdot (a + b) = \lambda a + \lambda b$
(ii) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
(iii) $(\lambda \cdot \mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a)$
(iv) $1 \cdot a = a$

2.3. Definition

Seien $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ Vektoren:

(i) Dann heißt für die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^n$ der Vektor

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x_i$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $x_1, \dots, x_k$.

(ii) Die Menge aller Linearkombinationen von $x_1, \dots, x_k$

$$\operatorname{lin}\{x_1, \dots, x_k\} := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x_i \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt **lineare Hülle** von $x_1, \dots, x_k$.

2.4. Beispiele

(i) Zwei Vektoren $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1, x_2 \neq \vec{0}$.

1. Fall
x_1 und x_2 zeigen in dieselbe (oder entgegengesetzte) Richtung. x_1 und x_2 heißen dann **kollinear**.

$\Rightarrow \operatorname{lin}\{x_1, x_2\}$ beschreibt Gerade durch den Ursprung in diese Richtung.

2. Fall
x_1 und x_2 zeigen in unterschiedliche Richtungen.

$$\Rightarrow \operatorname{lin}\{x_1, x_2\} = \mathbb{R}^2$$

(ii) Drei Vektoren $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ mit $x_1, x_2, x_3 \neq \vec{0}$.

1. Fall
x_1, x_2, x_3 zeigen in dieselbe (oder entgegengesetzte) Richtung.

$\Rightarrow \operatorname{lin}\{x_1, x_2, x_3\}$ beschreibt Gerade durch Ursprung in diese Richtung.

2. Fall
x_1, x_2, x_3 zeigen in verschiedene Richtungen, liegen aber in derselben Ebene. x_1, x_2 und x_3 heißen dann **komplanar**.

3. Fall
x_1, x_2, x_3 liegen nicht ein einer Ebene.

$$\Rightarrow \operatorname{lin}\{x_1, x_2, x_3\} = \mathbb{R}^3$$

2.5. Weitere Operationen mit Vektoren

Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$.
Seien $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle x, y \rangle := x \cdot y := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$$

Dann ist

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \in \mathbb{R}$$

Betrag, **Norm** oder **Länge** von x (Nach Pythagoras).
In $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos \alpha \text{ , mit } \alpha \text{ Winkel zwischen } x \text{ und } y.$$

Insbesondere für $x, y \neq \vec{0}$:

$$\langle x, y\rangle = \vec{0} \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90° \Leftrightarrow x \perp y$$

Vektor- oder **Kreuzprodukt** in $\mathbb{R}^3$:
$x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_2, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$x \times y \coloneqq (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1) \in \mathbb{R}^3$$

Dabei steht $\overrightarrow{x \times y}$ senkrecht auf x und y.

$$|x \times y| = |x| \cdot |y| \cdot \sin\alpha \text{, mit } \alpha \text{ Winkel zwischen } x \text{ und } y.$$

Beachte:

$$y \times x = -(x \times y) \text{ (Antikommutativ)}$$

3. Vektorräume

3.1. Definition

Sei K ein Körper. Ein Vektorraum V über K (oder K-Vektorraum oder K-VR) ist eine Menge V mit

(i) einer Addition:

$$\begin{aligned} +: V \times V &\to V \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

so dass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(ii) einer skalaren Multiplikation:

$$\begin{aligned} \cdot: K \times V &\to V \\ (\lambda, a) &\mapsto \lambda \cdot a \end{aligned}$$

so dass für $\lambda, \mu \in K$ und $a, b \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} \lambda(a + b) &= \lambda a + \lambda b \\ (\lambda + \mu)a &= \lambda a + \mu a \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot a &= \lambda \cdot (\mu \cdot a) \\ 1 \cdot a &= a \end{aligned}$$

Die Elemente von V heißen **Vektoren**.

3.2. Beispiele

(i) $\mathbb{R}^n$ wie in Kapitel 2 ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Allgemeiner für beliebigen Körper K:

$$K^n := \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in K \}$$

mit Addition

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

und skalarer Multiplikation

$$\lambda \cdot (a_1, \dots, a_n) := (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Somit ist K^n ein Vektorraum über K.
Zwei Schreibweisen: „“

$$K^n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in K \} \text{ „Zeilenraum“, oder}$$

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \, a_i \in K \right\} \text{ „Spaltenraum“.}$$

Speziell:

$$K^0 = \{\vec{0}\} \text{ „Nullvektorraum“}$$

(ii) Sei K ein Körper und M eine beliebige Menge. Dann ist

$$K^M := \{\text{Abbildungen } f: M \to K\}$$

ein K-Vektorraum mit Addition

$$f_1 + f_2: M \to K,$$

gegeben durch

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

und Multiplikation

$$\lambda f: M \to K,$$

gegeben durch

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Ist speziell $M = \{1, \dots, n\}$ endliche Menge, so ist K^M gerade der K^n.
Eine Abbildung $f: \{1, \dots, n\} \to K$ entspricht „Vektor“ $\begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}$.

3.3. Folgerungen aus den Vektorraumaxiomen

(i) $0 \cdot v = \vec{0}, \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$
(ii) $\lambda \cdot v = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = \vec{0}$
(iii) $\lambda(v - w) = \lambda v - \lambda w, (\lambda - \mu)v = \lambda v - \mu v$
(iv) $(-1)v = -v$

3.4. Definition

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subset V$ heißt **Untervektorraum**, **Unterraum** oder **Teilraum**, wenn

(i) $W \neq \emptyset$
(ii) $\vec{0} \in W$
(iii) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$
(iv) $\lambda \in K, w \in W \Rightarrow \lambda \cdot w \in W$

3.5. Satz

Ein Untervektorraum W von V ist wieder ein K-Vektorraum mit induzierter Addition und skalarer Multiplikation (das heißt, wenn man die Addition von $V \times V$ auf $W \times W$ und die skalare Multiplikation von $K \times V$ auf $K \times W$ einscrhänkt).

Beweis
Aus 3.4(iii) und (iv) folgt:

Addition

$$\begin{aligned} W \times W &\to W \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

Multiplikation

$$\begin{aligned} K \times W &\to W \\ (\lambda, a) &\mapsto \lambda a \end{aligned}$$

sind sinnvolle Verknüpfungen.

$(W, +)$ ist abelsche Gruppe: Assoziativ- und Kommutativgesetz klar (folgen aus V).

$\vec{0} \in W$:
Nach 3.4(iii) existiert $w \in W \overset{3.3(i)}{\Longrightarrow} 0 \cdot w = \vec{0}$.

Inverses Element:
Sei $w \in W \Rightarrow -w \overset{3.3(iv)}{=} (-1)w \in W$.

Rechenregeln für „·“ sind automatisch erfüllt, da sie auch für V gelten.

□

3.6. Beispiele

(i) In $\mathbb{R}^3$ bilden jede Gerade und jede Ebene **durch den Ursprung** einen Untervektorraum.

(ii) Sei $V = \mathbb{R}^3$ die Menge aller Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit zum Beispiel folgenden Untervektorräumen:

$$\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$
$$\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar}\}$$
$$\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ dreimal differenzierbar}\}$$
$$\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Polynomfunktion}\}$$

4. Lineare Unabhängigkeit und Basis

4.1. Definition

Sei V ein K-Vektorraum.

(i) Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $v_1, \dots, v_n \in V$ heißt

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_n$.

(ii) Für $W \subset V$ heißt die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus W

$$\operatorname{lin} W := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \;\middle|\; \lambda_i \in K, w \in W, n \in \mathbb{N} \right\}$$

die lineare Hülle von W.

4.2. Satz

$\operatorname{lin} W$ ist kleinster Untervektorraum von V, der W enthält.

Beweis
$\operatorname{lin} W$ ist Untervektorraum, denn

(i)

$$\sum_{i=1}^{0} \lambda_i w_i = \vec{0} \in \operatorname{lin} W \neq \emptyset$$

(ii) Seien

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \text{ und } \widetilde{w} = \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_j \widetilde{w}_j$$

beliebige Elemente von $\operatorname{lin} W$

$$\Rightarrow w + \widetilde{w} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i \in \operatorname{lin} W$$

(iii) Seien $\lambda \in K$ und

$$\lambda w = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot \lambda_i) w_i \in \operatorname{lin} W\,.$$

Ist X weiterer Untervektorraum von V mit $W \subset X$, dann ist zu teigen, dass $\operatorname{lin} W \subset X$.
Sei dann

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \in \operatorname{lin} W$$

beliebiges Element.
Wegen $w_i \in W \subset X$ dann auch

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \in W,$$

da X Untervektorraum.
Also $\operatorname{lin} W \subset X$.

□

4.3. Definition

Sei $(v_i)_{i \in I}$ ein System von Vektoren v_i in einem K-Vektorraum V mit I als beliebiger, endlicher oder unendlicher Indexmenge.

(i) $(v_i)_{i \in I}$ heißt **Erzeugendensystem** von v_i, wenn $\operatorname{lin}\{\, v_i \mid i \in I \,\} = V$.

(ii) $(v_i)_{i \in I}$ heißt **linear unabhängig**, wenn für jede Wahl von endlich vielen Vektoren $v_{i1}, \dots, v_{ik} \in \{\, v_i \mid i \in I \,\}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit

$$\lambda_1 v_{i_1} + \cdots + \lambda_k v_{i_k} = \vec{0}$$

(das heißt jede Linearkombination, die $\vec{0}$ ergibt) gilt

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0,$$

sonst **linear abhängig**.

(iii) $(v_i)_{i \in I}$ heißt **Basis** von V, wenn $(v_i)_{i \in I}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

4.4. Bemerkung

$(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig bedeutet:
Die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ einer Linearkombination

$$v = \lambda_1 v_{i_1} + \cdots + \lambda_k v_{i_k}$$

für einen Vektor $v \in \operatorname{lin}\{\, v_i \mid i \in I\,\}$ sind eindeutig bestimmt.

Denn:
Ist

$$v = \mu_1 v_{i_1} + \cdots + \mu_k v_{i_k}$$

weitere Linearkombination für v, so ist

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \mu_1)v_{i_1} + \cdots + (\lambda_k - \mu_k)v_{i_k} &= \lambda_1 v_{i_1} + \cdots + \lambda_k v_{i_k} - \left(\mu_1 v_{i_1} + \cdots + \mu_k v_{i_k}\right)\\ &= V - V = \vec{0}\end{aligned}$$

Linearkombination des Nullvektors $\xRightarrow[\text{lin. unabh.}]{(v_i)_{i\in I}} \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_k = \mu_k$.
Daher gilt:

$$(v_i)_{i\in I}$$

ist Basis von V. Das ist äquivalent zu

$$(v_i)_{i\in I}$$

ist System von Vektoren, so dass **jedes** $v \in V$ **eindeutig** als Linearkombination der v_i darstellbar ist.

4.5. Beispiele

(i) $V = K^n$ Spaltenraum von K. „**Kanonische Basis**“:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

ist Basis, denn

$$V = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix} \in K^n \Leftrightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\,.$$

(ii) Im $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen $\mathbb{R}[x]$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0,\ a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$$

bilden Potenzfunktionen $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$, wobei $p_i(x) = x^i$ eine Basis ist.
Denn für $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ ist $f = a_n p_n + \cdots + a_1 p_1 + a_0 p_0$.

$\Rightarrow (p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ist Erzeugendensystem von $\mathbb{R}[x]$.

Lineare Unabhängigkeit
Sei Polynom

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (Nullfunktion).}$$

Dann ist $a_n = \cdots = a_1 = 0$.

4.6. Lemma

Ist $p \in K[x]$ nicht das Nullpolynom und $\operatorname{grad} p = n$, so besitzt $p(x)$ höchstens n Nullstellen (Also falls $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow p$ ist Nullpolynom).

Beweis von 4.6
Annahme: p besitzt mindestens n Nullstellen $x_1, \dots, x_n$ (sonst fertig). Folgerung aus 1.13:

$$\Rightarrow p(x) = (x - x_1)\tilde{p}(x),$$

wobei $\operatorname{grad} \tilde{p} = n - 1$ und $\tilde{p}(x_2) = \tilde{p}(x_3) = \cdots = \tilde{p}(x_n) = 0$.
Rekursion liefert

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) - p_0$$

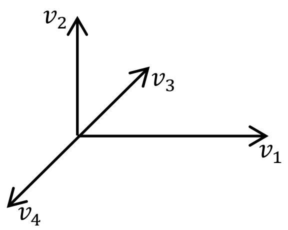
mit $\operatorname{grad} p_0 = 0$, das heißt p_0 ist Konstante $\neq 0$.
Somit

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, \dots, x_n\},$$

das heißt p hat höchstens n Nullstellen.

4.7. Beobachtung

In $\mathbb{R}^2$, Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 wie folgt:



$\Rightarrow \operatorname{lin}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in \mathbb{R}^2$

Man kann zwei geeignete Vektoren wählen, die Basis von $\mathbb{R}^2$ sind.
Zum Beispiel v_1 und v_2, oder v_1 und v_3.
Es liefert aber nicht jede Wahl von zwei Vektoren eine Basis ($\{v_3, v_4\}$ ist keine Basis, da die beiden Vektoren kollinear sind).
Mehr als zwei Vektoren sind stets linear abhängig, zum Beispiel v_1, v_2, v_3, weniger als zwei Vektoren erzeugen $\mathbb{R}^2$ nicht.

4.8. Satz

Für ein System $(v_i)_{i\in I}$ in einem K-Vektorraum sind äquivalent:

(i) $(v_i)_{i\in I}$ ist Basis.
(ii) $(v_i)_{i\in I}$ ist maximales linear unabhängiges System (das heißt Hinzunahme eines weiteren Vektors zerstört die lineare Unabhängigkeit).
(iii) $(v_i)_{i\in I}$ ist ein minimales Erzeugendensystem (das heißt nach Entfernen eines Vektors wird V nicht mehr erzeugt).

Es folgt insbesondere:

4.9. Satz

Jeder Vektorraum besitzt eine Basis. Genauer:

(i) Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis.
(ii) Jedes linear unabhängige System kann zu einer Basis ergänzt werden.

4.10. Bemerkung

Die Schlussfolgerung, dass 4.8 den Satz 4.9 impliziert, benötigt für den Fall unendlicher Systeme $(v_i)_{i\in I}$ etwas fortgeschrittene Mengenlehre, ist aber auf jeden Fall richtig.

4.11. Bemerkung

In jedem Vektorraum (außer $\{\vec{0}\}$) gibt es viele verschiedene Basen. Wenn $e_1, \dots, e_n$ und $f_1, \dots, f_n$ zwei verschiedene Basen sind, ist nach Definition einer Basis nicht klar, dass $n = m$ ist.

Man kann aber zeigen:

4.12. Satz

Jedes Paar von Basen eines K-Vektorraumes V haben gleich viele Elemente.

4.13. Definition

Die Anzahl der Elemente einer Basis eines K-Vektorraumes V heißt **Dimension** $\dim V$.

$$\dim\{\vec{0}\} := 0$$

4.14. Beispiele

(i) $V = K^n$

Kanonische Basis: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim K^n = n.$

(ii) $V = \mathbb{R}[x]$. Polynome $(p_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ mit $p_i(x) = x$ ist Basis

$\Rightarrow \dim \mathbb{R}[x] = \infty$

4.15. Folgerungen

Sei $\dim V = n$. Dann sind äquivalent:

(i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist Basis.
(ii) $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig.
(iii) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist Erzeugendensystem (folgt aus 4.8).

Bestimmung von Basen und Dimension
Seien $v_1, \dots, v_k \in K^n$ (nicht notwendigerweise linear unabhängig) Vektoren und $V = \text{lin}\{v_1, \dots, v_k\}$.

Matrizenschreibweise
4.16. Definition

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$-Matrix A ist ein rechteckiges Schema bestehend aus m **Zeilen** und n **Spalten**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$$

mit Einträgen $a_{ij} \in K$.
Die Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K wird mit

$$M_{m,n}(K)$$

bezeichnet.
Speziell:

$M_n(K) = M_{n,n}(K)$ (Quadratische Matrizen)
$M_{1,n}(K)$ (Zeilenvektoren in K^n)
$M_{n,1}(K)$ (Spaltenvektoren in K^n)

$$V = \text{lin}\{v_1, \dots, v_k\}, v_i \in K^n$$

ist Untervektorraum.

Schreibe nun die Vektoren $v_1, \dots, v_k \in K^n$ als Zeilenvektoren untereinander:

$$\to k \times n\text{-Matrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$$

4.17. Elementare Zeilenumformungen

Folgende **elementare Zeilenumformungen** ändern den von den Zeilenelementen erzeugten Vektorraum **nicht** (mit $\lambda \in K$):

(**Typ I**): Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot v_i \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$$

(**Typ II**): Addition des Vielfachen $\lambda \cdot v_i$ einer Zeile v_i zu einer anderen Zeile v_j:

$$\begin{pmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_j + \lambda \cdot v_i \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$$

(**Typ III**): Vertauschen von zwei Zeilen v_i, v_j:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$$

Man kann eine Matrix nun stets durch elementare Zeilenumformungen auf **Zeilenstufenform** (ZSF) bringen, das heißt in die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & & & & & & & & * \\ & & & 0 & \cdots & b_{2j_2} & & & & & & \\ & & & & & 0 & \cdots & b_{3j_3} & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & & 0 & b_{\ell j_\ell} \\ 0 & & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

4.18. Satz

Die von Null verschiedenen Zeichen bilden eine Basis von $V = \mathrm{lin}\{v_1, \dots, v_k\}$. Die Anzahl ℓ dieser Zeilen ist die Dimension von V.

4.19. Beispiel

Vier Vektoren in $\mathbb{R}^5$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$v_1, \dots, v_4$ als Zeilen in Matrix schreiben ($\to 4 \times 5$-Matrix):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{1.\leftrightarrow 2.}{\overset{\text{III}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3.\to 3.\cdot 1}{\overset{\text{II}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{3.\to 3.-2. \\ 4.\to 4.-\frac{1}{2}\cdot 2.}}{\overset{\text{II}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{3.\leftrightarrow 4.}{\overset{\text{III}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Basis von $V = \mathrm{lin}\{v_1, \dots, v_4\}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \dim V = 3$$

4.20. Algorithmus zur Umformung auf Zeilenstufenform (Gauß-Algorithmus)

1. Schritt: Suche erste Spalte (mit Index j_1), die nicht nur aus Nullen besteht und bringe durch Zeilentauschen (Typ III) ein von 0 verschiedenes Element in die 1. Zeile.
2. Schritt: Addiere Vielfache von der ersten Zeile zu allen anderen Zeilen (Typ II) derart, dass in den Spalten unterhalb von b_{1j_1} Nullen entstehen.
Nun Iteration: Dasselbe Verfahren anwenden auf die dadurch entstandene Untermatrix.
$\to$ Nach endlich vielen Iterationen ist die Matrix in Zeilenstufenform.

4.21. Bemerkungen

(i) Analog könnte man die Vektoren $v_1, \dots, v_k \in K^n$ als Spaltenvektoren in die Spalten einer $n \times k$-Matrix eintragen und elementare Spaltenumformungen durchführen.

(ii) Man definiert:
Die Dimension des von den Zeilen einer Matrix A erzeugten Untervektorraumes heißt **Zeilenrang** von A.
Die Dimension des von den Spalten einer Matrix A erzeugten Untervektorraumes heißt **Spaltenrang** von A.

(iii) Somit:
Der Zeilenrang ist invariant unter elementaren Zeilenumformungen.
Der Spaltenrang ist invariant unter elementaren Spaltenumformungen.

(iv) Es gilt sogar:
$$\text{Zeilenrang von } A = \text{Spaltenrang von } A$$
(Begründung später)

Seien U_1 und U_2 Untervektorräume von V, so ist $U_1 \cap U_2$ wieder Untervektorraum (Prüfe Bedingungen in 3.4) aber $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Untervektorraum.

Man definiert daher:

4.22. Definition

$$U_1 + U_2 \coloneqq \operatorname{lin}\{U_1 \cup U_2\}$$

heißt die **Summe** von U_1 und U_2 (kleinster Untervektorraum, der sowohl U_1 als auch U_2 enthält).

4.23. Bemerkung

Ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ Erzeugendensystem von U_1 und $\{w_1, \dots, w_m\}$ Erzeugendensystem von U_2:

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m\}$ ist Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$.

$$\Rightarrow U_1 + U_2 = \{\, v = u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \,\}$$

4.24. Dimensionsformel

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Beachte:
Ist $v = u_1 + u_2 \in U_1 + U_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_1 \in U_2$, so gilt für $w \in U_1 \cap U_2$:

$$v = \underbrace{(u_1 + w)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 - w)}_{\in U_2}$$

Das heißt Zerlegung $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ ist nicht eindeutig, wenn $\dim(U_1 \cap U_2) \geq 1$.

Ist jedoch $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$, das heißt $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$, so heißt

$$U_1 \oplus U_2 \coloneqq U_1 + U_2$$

die **direkte Summe** von U_1 und U_2.
Es gilt dann

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 \,.$$

5. Lineare Abbildungen

5.1. Definition

Seien V und W K-Vektorräume.
Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt (K-)**linear** (Vektorraum-)**Homomorphismus**, wenn

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\, x, y \in V$$

und

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x),\, \lambda \in K,\, x \in V$$

gilt.
Sei

$$\hom(V, W) \coloneqq \{f: V \to W \mid f \text{ linear}\}.$$

5.2. Beispiele

(i)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) $V = \mathbb{R}[x]$ (Menge aller reellen Polynome)

$$\begin{aligned} f: V &\to V \\ p &\mapsto p' \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} g: V &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \int_0^1 p(x)dx \end{aligned}$$

(iii) $V =$ Vektorraum aller konvergierenden Folgen

$$\begin{aligned} f: V &\to \mathbb{R} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto \lim_{x\to\infty} a_n \end{aligned}$$

5.3. Eigenschaften

(i) $f(x-y) = f(x) + f(-y) = f(x) + \left(-f(y)\right) = f(x) - f(y)$.
Insbesondere für $x = y$:

$$f(\vec{0}) = \vec{0}$$

(ii) Ist V' ein Teilraum von $V \Rightarrow f(V')$ ist Teilraum von V.
Denn:

$$\vec{0} = f(\vec{0}) \in f(V')$$

$x', y' \in f(V') \Rightarrow$ Es gibt $x, y \in V'$ mit $x' = f(x)$ und $y' = f(y)$.

$$\Rightarrow x' + y' = f(x) + f(y) = f(\underbrace{x+y}_{\in V'}) \in f(V')$$

und für $\lambda \in K$:

$$\lambda x' = \lambda f(x) = f(\underbrace{\lambda x}_{\in V'}) \in f(V')$$

(iii) Ist W' Teilraum von $W \Rightarrow f^{-1}(W')$ ist Teilraum von W.

Für $x, y \in f^{-1}(W') \Rightarrow f(x), f(y) \in W'$

$$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) \in W' \Rightarrow x + y \in f^{-1}(W')$$

und für $\lambda \in K$:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \in W' \Rightarrow \lambda x \in f^{-1}(W')$$

5.4. Definition

Für $f: V \to W$ linear ist

$$\operatorname{im} f := f(V)$$

das **Bild** von f (Image) und

$$\ker f := f^{-1}(\{\vec{0}\})$$

der **Kern** von f.
Nach 5.3(ii) und (iii) gilt:

$\operatorname{im} f$ ist Teilraum von W und $\ker f$ ist Teilraum von V.

5.5. Satz

Eine lineare Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{im} f = W$, und genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{\vec{0}\}$.

Zur Injektivität:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x-y) = f(x) - f(y) = \vec{0} \Leftrightarrow x - y \in \ker f$$

Lineare Abbildungen kann man addieren und Vielfache bilden:

Seien $f, g: V \to W$ linear und $\lambda \in K$:
Dann mit

$$\begin{aligned} f + g: V &\to W \\ x &\mapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda f: V &\to W \\ x &\mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

5.6. Satz

Für K-Vektorräume V und W ist $\hom(V, W)$ ein K-Vektorraum.

5.7. Beobachtung

Sei $f: V \to W$ linear und $(e_i)_{i\in I}$ eine Basis von V.
Kennt man $f(e_i)$ für alle $i \in I$, so kennt man $f(x)$ für jedes $x \in V$, denn

$$x = \lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_k e_{i_k}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= f\left(\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_k e_{i_k}\right) \\ &= f\left(\lambda_1 e_{i_1}\right) + \cdots + f\left(\lambda_k e_{i_k}\right) \\ &= \lambda_1 f\left(e_{i_1}\right) + \cdots + \lambda_k f\left(e_{i_k}\right) \end{aligned}$$

Dies zeigt:

5.8. Satz

Seien V und W K-Vektorräume, $(e_i)_{i\in I}$ Basis von V und $w_i \in W$ für jedes $i \in I$ gegeben.
Dann gibt es genau eine lineare Abbildung

$$f: V \to W$$

mit

$$f(e_i) = w_i, i \in I$$

(das heißt, eine lineare Abbildung ist eindeutig durch Bilder der Basisvektoren bestimmt).

$\operatorname{im} f$ wird von den Bildern der Basisvektoren erzeugt.

5.9. Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Sei $f: V \to W$ linear.
Dann gilt

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

Folgerung

Seien V und W K-Vektorräume gleicher Dimension mit Basen $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_n$.

Definiere lineare Abbildung $f: V \to W$ durch

$$f(v_i) = w_i, i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \operatorname{im} f = \operatorname{lin}\{w_1, \dots, w_n\} = W$$

Das heißt f ist surjektiv.

$$\Rightarrow \dim \ker f = \dim V - \dim \operatorname{im} f = n - n = 0$$

Also ist f bijektiv mit linearer Umkehrabbildung

$$f^{-1}(w_i) = v_i, i = 1, \dots, n.$$

5.10. Definition

Eine lineare Abbildung $f: V \to W$, die bijektiv ist, heißt (Vektorraum-)**Isomorphismus**. V und W heißen dann **isomorph**.

5.11. Satz

Je zwei K-Vektorräume gleicher Dimension sind isomorph.

5.12. Bemerkung

Kanonischer Repräsentant für K-Vektorräume der Dimension n:

K^n mit kanonischer Basis $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ist V ein anderer K-Vektorraum mit $\dim V = n$ und Basis $B = v_1, \dots, v_n$, so definiert der Isomorphismus

$$\Phi_B: V \to K^n$$

mit $\Phi_B(v_i) = e_i$ ein **Koordinatensystem**, das heißt es gilt gerade

$$\Phi_B(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Also ordnet Φ_B dem Vektor $v \in V$ die Koordinaten bezüglich der Basis B zu.

Beschreibung linearer Abbildungen mittels Matrizen

Matrizen-Kalkül

Seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K), \lambda \in K$.

Addition

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Multiplikation mit Skalaren

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Das heißt $M_{m,n}(K)$ ist K-Vektorraum isomorph zu $K^{m \cdot n}$.

Matrizenmultiplikation

Seien $A(a_{ij}) \in M_{m,k}(K)$ und $B = (b_{ij}) \in M_{k,n}(K)$.
Dann wird

$$A \cdot B = C(c_{ij}) \in M_{m,n}(K)$$

definiert durch

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}$$

$$m \text{ Zeilen} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{k \text{ Spalten}} \right. \cdot \left. \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \right\} k \text{ Zeilen}$$

„Zeile und Spalte“ (i-te Zeile von A mal j-te Spalte von B) ergibt c_{ij}:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

Damit erfüllt die Matrizenmultiplikation das Assoziativgesetz

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

und die Distributivgesetze

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Die Matrix

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

heißt $n \times n$-**Einheitsmatrix**.

Es gilt für $A \in M_{m,n}(K)$:

$$E_m \cdot A = A \cdot E_n = A$$

$\Rightarrow E_n$ ist neutrales Element.

Somit
Die quadratischen Matrizen $M_n(K)$ bilden einen Ring mit Einselement E_n, der (für $n > 1$) nicht kommutativ ist. Im Allgemeinen:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Sei nun $V = K^n$, $W = K^m$ und $f: V \to W$ linear.
Betrachte Bilder der kanonischen Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$:

$$V_1 := f(e_1), \dots, V_n := f(e_n) \in K^m$$

und schreibe sie als Spaltenvektoren in eine Matrix A:

$$\Rightarrow A \in M_{m,n}(K), v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_1 \in K^n$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 \cdot f(e_1) + \dots + x_n \cdot f(e_n) = x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n \\ &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot x \end{aligned}$$

Matrizenmultiplikation:

$$A \in M_{m,n}(K), x \in M_{n,1}(K) = K^n \Rightarrow A \cdot x = M_{m,1}(K) = K^m$$

Das heißt jede lineare Abbildung $f: K^n \to K^m$ hat die Gestalt

$$f(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

5.13. Satz

Sei jeder linearen Abbildung $f: K^n \to K^m$ mit $v_1 = f(e_1), \dots, v_n = f(e_n)$ (Bilder der kanonischen Basisvektoren) die Matrix $A = (v_1, \dots, v_n)$ mit Spalten $v_1, \dots, v_n$ zugeordnet. Dann ist

$$f(x) = A \cdot x, x \in K^n,$$

und die Zuordnung

$$M_m^n : \hom(K^n, K^m) \to M_{m,n}(K)$$
$$f \mapsto A$$

ist bijektiv.

Mehr noch:
Ist für weitere lineare Abbildung $g: K^n \to K^m$ $f(x) = A \cdot x$, $g(x) = B \cdot x$, dann gilt

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = A \cdot x + B \cdot x = (A + b) \cdot x$$
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot A \cdot x = (\lambda \cdot A) \cdot x$$

also

$$M_m^n(f + g) = A + B = M_m^n(f) + M_m^n(g)$$

und

$$M_m^n(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot A = \lambda \cdot M_m^n(f),$$

das heißt

$$M_M^n : \hom(K^n, K^m) \to M_{m,n}(K)$$

ist (Vektorraum-)Isomorphismus.

5.14. Komposition linearer Abbildungen

Seien $f: K^n \to K^m$ und $g: K^m \to K^l$ linear mit zugehörigen Matrizen $A \in M_{m,n}(K)$ und $B \in M_{l,m}(K)$.
Dann ist auch $g \circ f: K^n \to K^l$ linear und

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = B \cdot (A \cdot x) = (B \cdot A) \cdot x,$$

das heißt die zu $g \circ f$ gehörige Matrix ist das **Matrizenprodukt**

$$B \cdot A \in M_{l,n}(K).$$

5.15. Lineare Abbildungen zwischen beliebigen Vektorräumen

Seien V und W K-Vektorräume mit Basen $B_V: v_1, \dots, v_n$ und $B_W: w_1, \dots, w_m$. Sei weiterhin $f: V \to W$ linear.
Die Basen definieren Isomorphismen (Koordinaten) in V bzw. W, das heißt also Abbildungen

$$\Phi_{B_V} : V \to K^n$$
$$\Phi_{B_W} : W \to K^m$$

so dass

$$\Phi_{B_V}(v_i) = e_i \ i\text{-ter kanonischer Basisvektor in } K^n$$

und

$$\Phi_{B_W}(w_j) = \tilde{e}_j \ j\text{-ter kanonischer Basisvektor in } K^m.$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_{B_V}"'] \arrow[r, dotted, shift right=1.5] & W \arrow[d, "\Phi_{B_W}"] \arrow[d, dotted, shift right=1.5] \\
K^n \arrow[r, "\tilde{f}"'] \arrow[u, dotted, shift right=1.5] & K^m
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{f} \coloneqq \Phi_{B_W} \circ f \circ \Phi_{B_V}^{-1}$$

$\tilde{f}$ beschreibt lineare Abbildung in den Koordinaten, gegeben durch die Basen B_V und B_W.

Darstellende Matrix A besitzt als Spalten die Bilder der Basisvektoren $v_1, \dots, v_n$, dargestellt in Koordinaten, die durch die Basis B_W gegeben sind.
Das heißt für

$$f(v_j) = a_{1j} \cdot w_1 + \cdots + a_{mj} \cdot w_m \Rightarrow A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

Formaler
Es gilt

$$A = M_m^n(\tilde{f}) = M_m^n\left(\Phi_{B_W} \circ f \circ \Phi_{B_V}^{-1}\right) =: M_{B_W}^{B_V}(f).$$

Somit

$$\begin{aligned} M_{B_W}^{B_V} \colon \hom(V, W) &\to M_{m,n}(K) \\ f &\mapsto A \end{aligned}$$

ist Vektorraum-Isomorphismus, der der linearen Abbildung f die darstellende Matrix A zuordnet.

Vorsicht: Die darstellende Matrix ist abhängig von der Wahl der Basen B_V und B_W. Verschiedene Basen liefern für dieselbe Abbildung im Allgemeinen verschiedene darstellende Matrizen.

5.16. Definition

Sei $f \colon V \to W$ linear.
Dann heißt

$$\operatorname{rang} f \coloneqq \dim \operatorname{im} f$$

der **Rang** von f.
Da $\operatorname{im} f$ von den Bildern $f(v_1), \dots, f(v_n)$ einer Basis $v_1, \dots, v_n$ von V erzeugt wird, gilt der folgende Satz.

5.17. Satz

Der Rang einer linearen Abbildung f ist gleich dem Spaltenrang der Darstellungsmatrix (unabhängig von der Wahl der Bezugsbasen).

Spezialfall
Betrachte lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $\dim V = n$ (beschreiben durch quadratische Matrix $A \in M_n(K)$).

Dann gilt

$$\operatorname{rang} f = n \Leftrightarrow \operatorname{im} f = V, f \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow f \text{ ist injektiv}$$

da $\dim \ker f = n - \dim \operatorname{im} f = 0$.

$$f \text{ bijektiv} \Leftrightarrow \text{es gibt } f^{-1}: V \to V \text{ linear mit } f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V = f \circ f^{-1}.$$

Übertragung auf Matrizen
Sei $A \in M_n(K)$.

Spaltenrang von A gleich n (das heißt maximal) $\Leftrightarrow$ Es gibt Matrix $A^{-1} \in M_n(K)$ mit

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$$

Somit ist A^{-1} das inverse Element.

5.18. Definition

A^{-1} heißt die zu A **inverse Matrix**, die Matrix A heißt dann **invertierbar**, **regulär** oder **nicht singulär**.

5.19. Satz

(i) $A \in M_n(K)$ invertierbar $\Leftrightarrow$ Spaltenrang von $A = n$.
(ii) Invertierbare Matrizen beschreiben die bijektiven linearen Abbildungen.
(iii) Die Teilmenge

$$GL_n(K) := \{ A \in M_n(K) \mid A \text{ invertierbar} \}$$

der invertierbaren $n \times n$-Matrizen bildet bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe (**g**eneral **l**inear group) und es gilt

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}, A, B \in GL_n(K).$$

Dies folgt aus

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

5.20. Anwendung

Basiswechsel: Sei $\dim V = n$ sowie B und B' zwei Basen in V.

→ Zwei Koordinatendarstellungen:

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "\Phi_B"'] \arrow[dr, "\Phi_{B'}"] & \\
K^n \arrow[rr, "\Phi_{B'} \circ \Phi_B^{-1}"'] & & K^n
\end{tikzcd}$$

Mit

$$\Phi_{B'} \circ \Phi_B^{-1} : K^n \to K^n$$

linear, bijektiv.
Der Basiswechsel wird beschrieben durch die Matrix

$$T \in GL_n(K).$$

Somit:
Wenn $x \in K^n$ Koordinatenvektor bzgl. Basis $B \Rightarrow T \cdot x$ Koordinatenvektor bzgl. B'.
Wenn $y \in K^n$ Koordinatenvektor bzgl. Basis $B' \Rightarrow T^{-1} \cdot y$ Koordinatenvektor bzgl. B.

5.21. Transformation der darstellenden Matrix beim Basiswechsel

Sei $f : V \to W$ linear, $\dim V = n$ und $\dim W = m$.
Mit Basen B_V und B_W gilt

$$\Rightarrow A \cdot x = \Phi_{B_W} \circ f \circ \Phi_{B_V}^{-1}(x).$$

Sind nun B'_V und B'_W weitere Basen von V bzw. W, so gibt es Basiswechselmatrizen

$$T \in GL_n(K) : \Phi_{B'_V} \circ \Phi_{B_V}^{-1}(x) = T \circ x, x \in K^n$$

und

$$S \in GL_n(K) : \Phi_{B'_W} \circ \Phi_{B_W}^{-1}(y) = S \circ y, y \in K^m.$$

$\Rightarrow f$ darstellende Matrix B bzgl. neuer Basen B'_V und B'_W erfüllt

$$\begin{aligned}
B \cdot x &= \Phi_{B'_W} \circ f \circ \Phi_{B'_V}^{-1}(x) \\
&= (\Phi_{B'_W} \circ \Phi_{B_W}^{-1}) \circ (\Phi_{B_W} \circ f \circ \Phi_{B_V}^{-1}) \circ \underbrace{(\Phi_{B_V} \circ \Phi_{B'_V}^{-1})}_{(\Phi_{B'_V} \circ \Phi_{B_V}^{-1})^{-1}} \\
&= S \cdot A \cdot T^{-1} \cdot x
\end{aligned}$$

$$\boxed{B = S \cdot A \cdot T^{-1}}$$

Dabei beschreibt S den Basiswechsel in W und T^{-1} den Basiswechsel in V.

5.22. Definition

Zwei Matrizen $A, B \in M_{m,n}(K)$ heißen **äquivalent**, wenn es $T \in GL_n(K)$ und $S \in GL_m(K)$ gibt mit

$$B = S \cdot A \cdot T^{-1}.$$

5.23. Folgerungen

(i) Eine lineare Abbildung f wird also bzgl. verschiedener Basen gerade durch äquivalente Matrizen beschrieben.

(ii) Da

$$\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{im} f$$

nicht von der Wahl der Basen abhängt, gilt für eine Matrix A:

$$\text{Spaltenrang von } = \text{Spaltenrang von } B \cdot A \cdot C,$$

für B, C invertierbar.

(iii) Für $A \in M_{m,n}(K)$ lassen sich elementare Zeilenumformungen durch Multiplikation von links mit geeigneten Matrizen $B \in GL_m(K)$ beschreiben:

$$A \rightsquigarrow B \cdot A$$

(**Typ I**): Multiplikation mit der i-ten Zeile $\lambda \neq 0$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

λ in i-ter Zeile.

(**Typ II**): Addition des λ-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

λ in i-ter Spalte und j-ter Zeile.

(**Typ III**): Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

k-te Spalte enthält den k-ten kanonischen Einheitsvektor, aber die Einheitsvektoren der i-ten und der j-ten Zeile sind vertauscht.

⇒ Unter elementaren Zeilenumformungen ist nicht nur der Zeilenrang, sondern auch der Spaltenrang invariant.

Bringe A auf Zeilenstufenform A':

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & & & & * \\ & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \lambda_l & \\ 0 & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Die l-Spaltenvektoren an den Zeilenstufen bilden ein linear unabhängiges Erzeugendensystem des von den Spalten erzeugten Raumes.

⇒ Spaltenrang von $A' = l$ ⇒ Zeilenrang von A' $=$ Spaltenrang von A'.

Dies zeigt:
Satz: Für $A \in M_{m,n}(K)$ gilt:

$$\text{Zeilenrang von } A = \text{Spaltenrang von } A =: \operatorname{rang} A$$

(iv) Sei $A \in M_{m,n}(K)$ und

$$f: K^n \to K^m$$
$$x \mapsto A \cdot x$$

sowie

$$\operatorname{rang} f = \operatorname{rang} A = r.$$

Wähle Basis wie folgt:

Es ist $\dim \ker f = n - \dim \operatorname{im} f = n - r$.
Wähle Basis von K^n durch Ergänzen einer Basis von $\ker f$, etwa

$$v_1, \dots, v_r, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{\text{Basis von } \ker f}.$$

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_r f(v_r) \\ &= f(\lambda_1 v_w + \cdots + \lambda_r v_r) \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \in \ker f \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \cdots = \lambda_r = 0\end{aligned}$$

Sei

$$w_1 := f(v_1), \dots, w_r := f(v_r).$$

Man sieht, dass $w_1, \dots, w_r$ linear unabhängig sind.
Ergänze $w_1, \dots, w_r$ zu Basis $w_1, \dots, w_m$ von K^m.

Darstellende Matrix bezüglich dieser Basis:

$$B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung hängt aber nur von r ab.
Daher ist jede Matrix A mit $\operatorname{rang} A = r$ äquivalent zu obiger Matrix.

5.24. Satz

Zwei Matrizen $A, B \in M_{m,n}(K)$ sind genau dann äquivalent, wenn

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B\,.$$

Somit ist $\operatorname{rang} f$ die einzige invariante Eigenschaft linearer Abbildungen f unter Basiswechsel.

6. Lineare Gleichungssysteme

6.1. Definition

Ein **lineares Gleichungssystem** von m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ hat die Folgende Gestalt:

$$(*) := \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

mit Koeffizienten $a_{ij}, b \in K$.
Kompakte Schreibweise mit Koeffizientenmatrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

und rechter Seite

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m,$$

sowie Lösungsvektor

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n.$$

Dann schreibt sich $(*)$ kurz als

$$\boxed{A \cdot x = b}$$

Interpretation: A beschreibt **lineare Abbildung**

$$\begin{aligned} f\colon K^n &\to K^m \\ x &\mapsto A \cdot x \end{aligned}$$

Gesucht ist also $x \in K^n$ mit $f(x) = b$.

6.2. Folgerung

Lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$ ist lösbar, wenn $b \in \operatorname{im} f$.

Hierbei gilt:
$\operatorname{im} f$ wird von den **Spaltenvektoren** von A aufgespannt.
Insbesondere:

$$\dim \operatorname{im} f = \operatorname{rang} A$$

Homogene Gleichungssysteme

6.3. Definition

Das lineare Gleichungssystem $(*)$ heißt **homogen**, wenn für die die rechte Seite

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$$

gilt. Das heißt

$$A \cdot x = \vec{0}, A \in M_{m,n}(K).$$

Dann ist

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \in K^n$$

stets Lösung, im Allgemeinen gibt es aber weitere Lösungen.

6.4. Satz

$$\boxed{x \in K^n \text{ Lösung von } A \cdot x = \vec{0} = x \in \ker f}$$

Die Lösungen der homogenen Gleichung bilden also einen Untervektorraum. Es gilt

$$\dim \ker f = n - \dim \operatorname{im} f = n - \operatorname{rang} A\,.$$

Insbesondere: $x = \vec{0}$ einzige Lösung $\Leftrightarrow \operatorname{rang} A = n$.

6.5. Verfahren zu Lösung homogener Gleichungssysteme und damit Bestimmung des Kerns einer linearen Abbildung

$$A \cdot x = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{array}{r} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \ = 0 \\ \vdots \quad \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

Beachte: Anwenden von elementaren Zeilenumformungen

$A \rightsquigarrow A'$ transformiert Gleichungssystem in ein äquivalentes Gleichungssyste

$$A' \cdot x = \vec{0},$$

das heißt mit derselben Lösungsmenge.
Daher:
1. Schritt
Transformiere A durch Gauss-Algorithmus auf Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & & & & & & & * \\ & & & 0 & \cdots & b_{2j_2} & & & & & \\ & & & & & 0 & \cdots & b_{3j_3} & & & \\ & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & 0 & b_{\ell j_\ell} \\ 0 & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \quad (\Leftrightarrow \ell = \operatorname{rang} A\,)$$

Beachte: Zu jeder Spalte korrespondiert eine der Unbekannten x_j ($\leftrightarrow j$-te Spalte).

2. Schritt
Wähle alle x_j, die **nicht** zu Spalten an Zeilenstufen gehören als freie Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-\ell}$ (Beachte: Anzahl dieser x_j: $n - \ell = n - \operatorname{rang} A = n - \dim \operatorname{im} f = \dim \ker f$).

3. Schritt
Löse nun rekursiv von unten nach oben, beginnend mit der ℓ-ten Zeile (die letzte Zeile, die keine Nullzeile ist) die zugehörigen Gleichungen nach den noch nicht bestimmten Unbekannten an den Zeilenstufen auf.

6.6. Beispiele

(i) Drei reelle Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

1. Schritt
Zugehörige Matrix auf Zeilenstufenform bringen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Stufen | Keine Stufen

$$\Rightarrow \begin{aligned} \operatorname{rang} A &= \dim \operatorname{im} f = 2 \\ \dim \ker f &= 3 - \dim \operatorname{im} f = 1 \end{aligned}$$

2. Schritt
Setze $x_3 = \lambda$ als freien Parameter (da dort keine Stufe in der Zeilenstufenform ist).

3. Schritt
Umgeformtes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Nullzeilen können ignoriert werden.
Aus zweiter Gleichung

$$x_1 = 2x_2 - x_3 = 2(-3\lambda) - \lambda = -7\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ker f = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

eindimensional und $\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Basis von $\ker f$.

(ii) Drei Gleichungen mit vier Unbekannten:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

1. Schritt

Zugehörige Matrix auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Stufen Keine Stufen

$$\Rightarrow \begin{aligned} \operatorname{rang} A &= \dim \operatorname{im} f = 2 \\ \dim \ker f &= 3 - \dim \operatorname{im} f = 1 \end{aligned}$$

2. Schritt

Setze $x_3 = \lambda_1$ und $x_4 = \lambda_2$ als freie Parameter.

3. Schritt

Aus zweiter Gleichung:

$$-2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 = -\frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2$$

Aus erster Gleichung:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_1 &= -x_2 - x_3 - x_4 \\ &= \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ &= -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ker f = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Inhomogenes Gleichungssystem

$$A \cdot x = b$$

mit $b \in K^m$, $b \neq 0$ und $A \in M_{m,n}(K)$ muss nicht immer lösbar sein. Genauer:

$$\text{lösbar } \forall b \in K^m \Leftrightarrow \operatorname{rang} A = m$$

Beschreibe inhomogenes Gleichungssystem durch **erweiterte Matrix**.
Diese entsteht durch Anhängen von b als $(n+1)$-te Spalte an A:

$$(\,A \mid b\,) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in M_{m,n+1}(K)$$

Sind $a_1, \dots, a_n \in K^m$ die Spalten von A, so gilt

$$A \cdot x = b \text{ lösbar} \Leftrightarrow b \in \operatorname{lin}\{a_1, \dots, a_n\}\,.$$

Anders ausgedrückt:

$$\begin{aligned} &\operatorname{lin}\{a_1, \dots, a_n, b\} \underset{\text{i.A. „}\geq\text{“}}{=} \operatorname{lin}\{a_1, \dots, a_n\} \\ \Leftrightarrow\ &\underbrace{\dim \operatorname{lim}\{a_1, \dots, a_n, b\}}_{\operatorname{rang}(\,A|b\,)} = \underbrace{\dim \operatorname{lim}\{a_1, \dots, a_n\}}_{\operatorname{rang} A} \end{aligned}$$

6.7. Satz

$$\boxed{A \cdot x = b \text{ lösbar} \Leftrightarrow \operatorname{rang}(\,A \mid b\,) = \operatorname{rang} A}$$

Ist x Lösung von $A \cdot x = b$, so ist im Allgemeinen x nicht die einzige Lösung.

$$\begin{aligned} A \cdot y = b &\Leftrightarrow A \cdot (y - x) = A \cdot y - \underbrace{A \cdot x}_{=b} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow y - x \text{ Lösung des homogenen Gleichungssystems} \end{aligned}$$

Das heißt $y - x \in \ker f$.

6.8. Satz

Allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $=$ spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $+$ allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems.

Also erhält man den Lösungsraum des inhomogenen Gleichungssystems durch Verschieben eines Untervektorraums (nämlich $\ker f$) um einen konstanten Vektor.

→ **affiner Unterraum**

6.9. Verfahren zur Lösung inhomogener Gleichungssysteme

$$A \cdot x = b,\ A \in M_{m,n}(K),\ b \in K^m$$

zugeordnete erweiterte Matrix

$$(\,A \mid b\,) \in M_{m,n+1}(K).$$

Wieder führen **elementare Zeilenumformungen** von $(\,A \mid b\,)$ zu äquivalentem Gleichungssystem.

1. Schritt
Transformiere die erweiterte Matrix $(\,A \mid b\,)$ durch elementare Zeilenumformungen (Gauß-Algorithmus)

$$(\,A \mid b\,) \rightsquigarrow (\,A' \mid c\,),$$

so dass A' in Zeilenstufenform ist:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & b_{1,j_1} & & & & & & * & c_1 \\
 & & & 0 & \cdots & b_{2,j_2} & & & & & \\
 & & & & & 0 & \cdots & b_{3,j_3} & & & \vdots \\
 & & & & & & & 0 & \ddots & & \\
 & & & & & & & & 0 & b_{\ell,j_\ell} & c_\ell \\
 & & & & & & & & & & c_{\ell+1} \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & & & & & & & & & c_m
\end{array}\right)$$

Für $c_{\ell+1} \ldots c_m$ sind die entsprechenden Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 0 = c_{\ell+1} \\ \vdots \\ 0 = c_m \end{pmatrix}.$$

2. Schritt
Gleichungssystem lösbar $\Leftrightarrow c_{\ell+1} = \cdots = c_m = 0$.

Wenn lösbar, dann:
3. Schritt
Wähle alle c_j, die nicht zu Spalten an Zeilenstufen von A' gehören, als freie Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-\ell}$.

4. Schritt
Löse nun rekursiv von unten nach oben, beginnend mit der ℓ-ten Zeile, die Gleichungen nach den noch nicht bestimmten Unbekannten x_j an den Zeilenstufen auf.

6.10. Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\quad &= 1 \\ -3x_2 \qquad + 3x_4 &= 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -5x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 10x_4 &= 1 \end{aligned}$$

1. Schritt

Erweiterte Matrix auf Zeilenstufenform bringen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & -3 & -10 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2. Schritt

In der Nullzeile (4. Zeile) von A' steht in der erweiterten Spalte ebenfalls $0 \Rightarrow$ lösbar.

3. Schritt

Wähle $x_4 = \lambda$ als freien Parameter.

4. Schritt

Äquivalentes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\quad &= 1 \\ -3x_2 + \qquad 3x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 8x_4 &= 6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x_3 + 8\lambda = 6 &\Leftrightarrow x_3 = 3 - 4\lambda \\ -3x_2 + 3\lambda = 0 &\Leftrightarrow x_2 = \lambda \\ x_1 + 3\lambda + 3 - 4\lambda = 1 &\Leftrightarrow x_1 = -2 + \lambda \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{spez. Lösung}} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Lösung des hom. Gleichungssystems } (\ker f)}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Berechnung der Inversen Matrix

Sei $A \in M_n(K)$ quadratische Matrix.

Bringe A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform A'.

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow A'' \text{ besitzt keine Nullzeilen}$$

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}, b_{jj} \neq 0$$

Multiplikation der j-ten Zeile mit

$$\frac{1}{b_j}, j = 1, \dots, n \rightsquigarrow A'' = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Addiere, beginnend mit der n-ten Zeile, Vielfache jeder Zeile zu darüber liegenden Zeilen, so dass oberhalb der Hauptdiagonalen Nullen entstehen:

$$\rightsquigarrow A''' = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = E_n$$

Nach 5.23(iii) lassen sich elementare Zeilenumformungen durch Multiplikation von links mit geeigneten Matrizen $B_1, \dots, B_k \in GL_n(K)$ beschreiben. (Matrizen aus $GL_n(K)$ sind alle invertierbar).

Also

$$B_k \cdot B_{k-1} \cdot \dots \cdot B_1 \cdot A = E_n$$

$$\Rightarrow A^{-1} = B_k \cdot B_{k-1} \cdot \dots \cdot B_1 \ (\cdot E_n)$$

6.11. Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix

Erweitere quadratische Matrix $A \in M_n(K)$ durch Anhängen von $n \times n$-Einheitsmatrix E_n:

$$(\, A \mid E_n \,) \in M_{n,2n}(K)$$

Transformiere erweiterte Matrix durch elementare Zeilenumformungen wie oben beschrieben, so dass vorderer Block zu Einheitsmatrix E_n wird (A invertierbar $\Leftrightarrow$ Zeilenstufenform ist E_n):

$$(\, E_n \mid B \,)$$

dann ist $B = A^{-1}$.

6.12. Beispiel

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Erweitere Matrix und bringe A auf Zeilenstufenform. Wende die elementaren Zeilenumformungen simultan auf die rechte Matrix an.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) = (\, E_3 \mid A^{-1} \,)$$

7. Determinanten

Betrachte „quadratisches“ Gleichungssystem

$$A \cdot x = b$$

mit $A \in M_n(K)$, $b \in K^n$.

1. Fall: $\operatorname{rang} A = n$

$$\Rightarrow \dim \ker f = n \Rightarrow \operatorname{im} f = K^n$$

und

$$\dim \ker f = n - \dim \operatorname{im} f = 0 \Rightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$$

→ Gleichungssystem ist für jede Seite b eindeutig lösbar.

2. Fall: $\operatorname{rang} A < n$

$$\Rightarrow \operatorname{im} f \neq K^n \text{ und } \ker f \neq \{\vec{0}\}$$

→ Gleichungssystem nicht für alle rechten Seiten b lösbar.
Wenn es eine Lösung gibt, ist diese nicht eindeutig.

Welcher Fall vorliegt, lässt sich mit der **Determinante** entscheiden.

7.1. Satz

Es gibt genau eine Abbildung

$$\begin{aligned} \det\colon M_n(K) &\to K \\ A &\mapsto \det A \end{aligned}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) det ist linear in jeder Spalte a_i von A. Es ist

$$\det(a_1, \dots, x + y, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, x, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, y, \dots, a_n)$$

und

$$\det(a_1, \dots, \lambda \cdot x, \dots, a_n) = \lambda \cdot \det(a_1, \dots, x, \dots, a_n)$$

für alle $x, y \in K^n$ und $\lambda \in K$.

(ii) Es ändert sich das Vorzeichen, wenn man zwei Spalten vertauscht.

(iii) $\det E_n = 1$

In Worten: det ist $\underbrace{\text{normierte}}_{\text{(iii)}}$, $\underbrace{\text{alternierende}}_{\text{(ii)}}$ $\underbrace{\text{Multilinear}}_{\text{(i)}}$form.

7.2. Definition

Für $A \in M_n(K)$ heißt

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

die **Determinante** von A.

7.3. Eigenschaften

(i) Zwei identische Spalten $\Rightarrow \det A = 0$.
Denn beim Vertauschen der Spalten ändert sich nichts bis auf das Vorzeichen.

(ii) Wenn eine Spalte $= \vec{0} = \det A = 0$.

(iii) Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

heißt die Matrix

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(K)$$

die durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entsteht, die zu A **transponierte Matrix**.

Es gilt

$$\boxed{\det A = \det A^t}, A \in M_n(K).$$

Folglich gelten alle Aussagen, die für die Spalten von A formuliert wurden, auch für die Zeilen, das heißt

a. $\det A$ ist linear zu jeder Zeile.
b. $\det A$ wechselt das Vorzeichen bei Vertauschen von zwei Zeilen.
c. Eine Zeile gleich Null ⇒ $\det A = 0$.

(iv) Verhalten bei elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen:

a. (**Typ I**): Zeile (Spalte) mit λ multiplizieren.
⇒ Determinante multipliziert sich mit λ.
b. (**Typ II**): Vielfaches einer Zeile (Spalte) zu anderer addieren.
⇒ Determinante bleibt gleich.
c. (**Typ III**): Zwei Zeilen (Spalten) vertauschen.
⇒ Determinante wechselt Vorzeichen.

Zu Typ II:

$$\begin{aligned} &\det(\dots, a_i, \dots, a_j + \lambda \cdot a_i, \dots) \\ &= \det(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots) + \lambda \cdot \underbrace{\det(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots)}_{=0} \\ &= \det(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots) \end{aligned}$$

Folgerung
Bring man Matrix A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform A', so ändert sich die Determinante bei jeder Umformung nur um einen Faktor $\neq 0$.

Also

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$$

1. Fall: $\operatorname{rang} A < n$

⇒ A' enthält Nullzeile ⇒ $\det A' = 0 \Rightarrow \det A = 0$.

2. Fall: $\operatorname{rang} A = n$

A' lässt sich durch elementare Zeilenumformungen zu E_n (vgl. 6.11) umformen:

$$\det E_n = 1 \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$$

(⇒ Matrix invertierbar ⟺ $\det A \neq 0$)

7.4. Satz

Sei $A \in M_n(K)$. Dann sind äquivalent:

(i) $\operatorname{rang} A = n$ (maximal)

(ii) $\det A \neq 0$

(iii) A ist invertierbar ($A \in GL_n(K)$)

(iv) Die Spalten von A sind linear unabhängig (das heißt Basis).

(v) Die Zeilen von A sind linear unabhängig (das heißt Basis).

(vi) Gleichungssystem

$$A \cdot x = b$$

für jedes $b \in K^n$ eindeutig lösbar (nämlich $x = A^{-1} \cdot b$).

7.5. Proposition

Sei $A \in M_n(K)$ eine **obere Dreiecksmatrix**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & * \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Beweis

Ist ein $a_{ii} = 0$, so ist $\operatorname{rang} A < n \Rightarrow \det A = 0$. O.k.

Seien daher alle $a_{ii} \neq 0$: Durch elementare Zeilenumformungen (vom Typ II) kann man A umformen zur Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dabei ändert sich die Determinante nicht:

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} a_{11} & & & & * \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}}_{=1}$$

7.6. Berechnung der Determinante für $n \times n$-Matrizen

Bringe Matrix A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform A'.
A' ist obere Dreiecksmatrix $\Rightarrow \det A' \overset{7.4}{=} \det A$.

7.7. Beispiel

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{1.\leftrightarrow 3.}{=} -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Typ II}}{=} -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{2.\leftrightarrow 4.}{=} \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{Typ II}}{=} \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{Typ II}}{=} \underbrace{\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}}_{\text{obere Dreiecksmatrix}}$$

$$= (-1) \cdot 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-9) = -27$$

7.8. Spezialfälle

2×2-Matrizen

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

3×3-Matrizen

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

7.9. Beispiel

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$

$$= 12 - 36 - 9 - 20 = -53$$

7.10. Entwicklungssatz von Laplace

Für $A \in M_n(K)$ bezeichnet

$$A_{ij} \in M_{n-1}(K)$$

die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht, mit $i, j = 1, \dots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach j-ter Spalte:

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \right)}$$

Entwicklung nach i-ter Zeile:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \right)}$$

Im Beispiel 7.9: Entwicklung nach 1. Zeile

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= 2[(-2) \cdot 5 - 3 \cdot (-2)] + 3 \cdot [(-2) \cdot 6 - 3 \cdot]$$
$$= 2 \cdot (-4) + 3 \cdot (-15) = -8 - 45 = -53$$

Weitere Sätze für Determinanten

Erinnerung: $\sigma \in S_n$ Permutation

$$\sigma: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \text{ bijektiv.}$$

Vorzeichen $\operatorname{sgn} \sigma$ einer Permutation:
Jede Permutation σ lässt sich bilden durch wiederholtes Vertauschen von je zwei Elementen von $\{1, \dots, n\}$.

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} +1, \text{ wenn Anzahl der Vertauschungen gerade,} \\ -1, \text{ wenn Anzahl der Vertauschungen ungerade.} \end{cases}$$

7.11. Formel von Leibniz

Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Dann ist

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} .$$

7.12. Determinanten-Multiplikationssatz

Für $A, B \in M_n(K)$ gilt

$$\boxed{\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B}$$

($\Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ für A invertierbar).

7.13. Determinanten von Block-Matrizen

Sei $A \in M_n(K)$ von der Form

$$A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

mit $B \in M_l(K)$, $C \in M_m(K)$ (das heißt $l + m = n$).
Dann ist

$$\det A = \det B \cdot \det C .$$

7.14. Beispiel

Sei $A = (a_1, \ldots, a_n) \in M_n(K)$ Matrix mit Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n$ und

$$\widetilde{A_{ij}} := (a_1, \ldots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$

das heißt der j-te Spaltenvektor ist ersetzt durch den i-ten kanonischen Basisvektor e_i.

$$\det \widetilde{A_{ij}} = \det \begin{pmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ & 1 & \\ a_1, \ldots, a_{j-1}, & 0, & a_{j+1}, \ldots, a_n \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{j-1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & * & \ldots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

mit A_{ij} Untermatrix nach Streichen von i-ter Zeile und j-ter Spalte.

7.15. Definition

Die Matrix

$$\tilde{A} := \left((-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

heißt die zu A **komplementäre Matrix**.

7.16. Lemma

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot E_n$$

Beweis
Mit Bezeichnungen wie oben berechne Eintrag in Zeile i und Spalte k von $\tilde{A} \cdot A$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a_{ij}} \cdot a_{jk} &= \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot \det \widetilde{A_{ji}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot \det\left(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n\right) \\
&= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot e_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\
&= \det\left(a_1, \dots, a_{(i-1)}, a_k, a_{i+1}, \dots, a_n\right) \\
&= \begin{cases} \det A, \text{ für } k = i, \\ \quad 0, \text{ für } k \neq i. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

7.17. Satz

Sei $A \in GL_n(K)$.

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$$

Anwendung
Lineares Gleichungssystem

$$A \cdot x = b, A \in GL_n(K)$$

$$\Rightarrow x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} \cdot b$$

$\Rightarrow$ mit Notation wie oben für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Dabei ist

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a_{ij}} \cdot b_j = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{j=1}^{n} \det \widetilde{A_{ij}} \cdot b_j \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \det\big(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n\big) \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \det \underbrace{(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}_{i\text{-te Spalte von } A \text{ ersetzt durch } b} \end{aligned}$$

Es folgt

7.18. Cramersche Regel

Sei $A \in GL_n(K)$, $b \in K^n$.

Dann ist die Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ von $A \cdot x = b$ gegeben durch

$$x_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det A}$$

7.19. Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\;\; &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 1 + 3 + 0 - 0 - 2 - 0 = 2$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 - 0 - 2 - 1) = -1 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + 3 + 0 - 0 - 0 - 0) = \quad 2 \\ x_3 &= \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(0 + 3 + 0 - 3 - 2 - 0) = -1 \end{aligned}$$

8. Eigenwerte und Eigenvektoren

8.1. Definition

Eine lineare Abbildung f von einem Vektorraum V in sich selbst

$$f: V \to V$$

heißt **Endomorphismus**.
Ist $\dim V = n < \infty$ und wählt man eine Basis $e_1, \dots, e_n$, so lässt sich f durch quadratische Matrix $A \in M_n(K)$ beschreiben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wobei

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e_i$$

d.h. für

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$$

ist

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung von

$$f(v): f(v) = \sum_{i=1}^{n} x'_i \cdot e_i$$

Beachte: Man wählt natürlich dieselbe Basis im Definitions- und Wertebereich, da beide identisch sind.

Basiswechsel: Wählt man eine neue Basis in V, so erhält man die neuen Koordinaten

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\Phi_B"'] \arrow[dr, "\Phi_{B'}"] & \\ K^n \arrow[rr, "S"] & & K^n \end{tikzcd}$$

mittels Basiswechselmatrix

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit $S \in GL_n(K)$ invertierbare Matrix.

$\Rightarrow$ Darstellende Matrix B der linearen Abbildung bzgl. der neuen Basis.

$$\boxed{B = S \cdot A \cdot S^{-1}}$$

Basiswechsel alt → neu

Lineare Abbildung in alten Koordinaten

Basiswechsel neu → alt

8.2. Definition

Zwei Matrizen $A, B \in M_n(K)$ heißen **ähnlich**, wenn es $S \in GL_n(K)$ gibt mit

$$\boxed{B = S \cdot A \cdot S^{-1}},$$

d.h. ähnliche Matrizen beschreiben denselben Endomorphismus bzgl. verschiedener Basen.

Frage: Gibt es besonders „einfache“ Endomorphismen?

„Einfach“ ist zum Beispiel, wenn darstellende Matrix **Diagonalmatrix** ist:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt für die zugehörigen Basisvektoren $e_1, \dots e_n$:

$$f(e_1) = \lambda_1 \cdot e_1, \dots, f(e_n) = \lambda_n \cdot e_n$$

und allgemein für beliebigen Vektor

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i \cdot e_i$$

d.h. f bildet die durch die Basisvektoren e_i bestimmten eindimensionalen Unterräume V_i ($= K \cdot e_i$ „Geraden“) auf sich ab (invariante Teilräume).

f operiert unabhängig auf den einzelnen V_i.
Verändert man eine Koordinate x_i von x, so verändert sich auch nur die i-te Koordinate $\lambda_i \cdot x_i$ von $f(x)$, die anderen Koordinaten bleiben gleich.

8.3. Beispiel

$V = \mathbb{R}^3$ mit kanonischer Basis.
$f(x) = A \cdot x$ mit $A \in M_3(\mathbb{R})$
wobei

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 34 \\ -4 & 1 & -20 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Nun Basiswechsel mit Basiswechselmatrix $S \in GL_3(\mathbb{R})$:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Nachrechnen zeigt: $S \cdot S^{-1} = E$)

Neue Matrix nach Basiswechsel

$$\begin{aligned} B = S \cdot A \cdot S^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 & 34 \\ -4 & 1 & -20 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wählt man eine geeignete Basis, hier

$$e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wird die darstellende Matrix „einfach“, d.h. Diagonalmatrix.

Probleme:

Gibt es immer eine solche Basis? (Nein!)

Wie kann man eine solche Basis finden?

Basisvektoren erfüllen gerade (im Beispiel)

$$f(e_1) = 1 \cdot e_1, f(e_2) = 2 \cdot e_2, f(e_3) = 3 \cdot e_3$$

8.4. Definition

Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus in einem K-VR V.
Ein $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** (EW) von f, wenn $v \in V$ mit $v \neq \mathcal{O}$ existiert mit

$$\boxed{f(v) = \lambda \cdot v}$$

Jeder solche Vektor v heißt **Eigenvektor** (EV) von f zum Eigenwert λ.
Ist λ Eigenwert von f, so heißt

$$\mathrm{Eig}(\lambda, f) = \{v \in V : f(v) = \lambda \cdot v\}$$

der **Eigenraum** von f zum Eigenwert λ.

Beachte:
$v = \mathcal{O}$ gehört stets zum Eigenraum, da $f(\mathcal{O}) = \lambda \cdot \mathcal{O}$, heißt aber nicht Eigenvektor.

Ist speziell $f: K^n \to K^n$ mit $f(x) = A \cdot x$, $A \in M_n(K)$ und $\mathrm{Eig}(\lambda, A) \coloneqq \mathrm{Eig}(\lambda, f)$ der Eigenraum von A zum Eigenwert λ.

Bestimmung der Eigenwerte:
Sei f Endomorphismus mit darstellender Matrix $A \in M_n(K)$.

λ ist EW $\Leftrightarrow$ Es gibt $x \in K^n, x \neq \mathcal{O}$ mit $A \cdot x = \lambda \cdot x$
$\Leftrightarrow$ Es gibt $x \in K^n, x \neq \mathcal{O}$ mit $A \cdot x - \lambda \cdot E = \mathcal{O}$
$\Leftrightarrow$ Es gibt $x \in K^n, x \neq \mathcal{O}$ mit $(A - \lambda \cdot E) \cdot x = \mathcal{O}$
$\Leftrightarrow$ Es gibt Lösung $x \neq \mathcal{O}$ des homogenen, quadratischen Gleichungssystems $(A - \lambda \cdot E) \cdot x = \mathcal{O}$
$\Leftrightarrow \det(A - \lambda \cdot E) = 0$

Beachte:
Nach Formel von Leibniz für Determinanten ist $\lambda \mapsto \det(A - \lambda \cdot E)$ ein Polynom in λ vom Grad n.

8.5. Definition

Für $A \in M_n(K)$ heißt $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E)$ das charakteristische Polynom von A.

Wir finden somit:

8.6. Satz

Sei A darstellende Matrix vom Endomorphismus f, dann gilt:

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } f \text{ (bzw. } A\text{)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda \text{ Nullstelle des charakteristischen Polynoms } P_A$$

Ist $f: K^n \to K^n$ gegeben durch $f(x) = A \cdot x$, so gilt

$$\mathrm{Eig}(\lambda, f) = \mathrm{Eig}(\lambda, A) = \ker(A - \lambda \cdot E)$$

ist Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda \cdot E) \cdot x = \mathcal{O}$.

8.7. Beispiel

Sei $f(x) = A \cdot x$ wie in 8.3:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 34 \\ -4 & 1 & -20 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 9-\lambda & 2 & 34 \\ -4 & 1-\lambda & -20 \\ -1 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (9-\lambda)(1-\lambda)(-4-\lambda) + 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1 \cdot (1-\lambda) \cdot 34 - (4+\lambda) \cdot 4 \cdot 2 \\ &= -(9 - 10\lambda + \lambda^2)(4+\lambda) + 40 + 34 - 34\lambda - 32 \cdot 8\lambda \\ &= -36 \cdot 9\lambda + 40\lambda + 10\lambda^2 - 4\lambda^2 - \lambda^3 + 42 - 42\lambda \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $P_A(\lambda)$ sind die gesuchten Eigenwerte (hier 1, 2 und 3).

Nullstellen (= Eigenwerte) von $P_A(\lambda)$ bestimmen: Rate $P_A(1) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\begin{array}{l} (-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6) \div (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 5\lambda - 6 \\ \underline{-(-\lambda^3 + \lambda^2)} \\ \quad 5\lambda^2 - 11\lambda \\ \quad \underline{-(5\lambda^2 - 5\lambda)} \\ \qquad -6\lambda + 6 \\ \qquad \underline{-(-6\lambda + 6)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Bleibt $-\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$ zu lösen. Nach Umkehrung der Vorzeichen:

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = 3$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = 3$

Bestimme Eigenraum zu z.B. $\lambda_1 = 1$

Homogenes Gleichungssystem:

$$(A - 1 \cdot E) \cdot x = \begin{pmatrix} 9-1 & 2 & 34 \\ -4 & 1-1 & -20 \\ -1 & 0 & -4-1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 2 & 34 \\ -4 & 0 & -20 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Anmerkung: Der} \\ \text{Kern dieser Matrix} \\ \text{ist Eigenraum}}} \cdot x = \mathcal{O}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 34 \\ -4 & 0 & -20 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 8 & 2 & 34 \\ 4 & 0 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = \mu$ als freier Parameter

2. Gleichung: $2x_2 - 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_3 = 3\mu$
1. Gleichung: $x_1 + 5x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -5x_3 = -5\mu$

$$\mathrm{Eig}(1, A) = \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

8.8. Satz

Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Beweis: Induktion nach der Anzahl k der Eigenvektoren.

i.A.: $k = 1$:
Eigenvektor $\neq \mathcal{O}$ o.k.

i.S.: $k \to k + 1$:
Sei $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ mit $i = 1, \dots, k + 1$
und

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot v_i = \mathcal{O} \text{ Linearkombination der Null}$$

$$\Rightarrow \mathcal{O} = f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot f(v_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot \lambda_i \cdot v_i$$

aber auch

$$\mathcal{O} = \lambda_{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) \cdot v_i = \mathcal{O}$$

Differenz bilden:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_{k+1})}_{\substack{=0 \text{ für} \\ i=k+1}} \cdot v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) \cdot v_i = \mathcal{O}$$

Nach i.V. sind $v_i, \dots, v_k$ linear unabhängig

$$\Rightarrow \alpha_i \cdot (\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, k$$

da $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$ für $i = 1, \dots, k \Rightarrow \alpha_i = 0$ für $i = 1, \dots, k$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha_{k+1} \cdot v_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot v_i = \mathcal{O} \\ v_{k+1} \neq \mathcal{O} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$$

8.9. Bemerkungen

(i) Der Eigenraum $\operatorname{Eig}(\lambda, f)$ zu einem Eigenwert λ ist stets ein Untervektorraum.

(ii) Für je zwei verschiedene Eigenwerte λ_1 und λ_2 gilt:

$$\operatorname{Eig}(\lambda_1, f) \cap \operatorname{Eig}(\lambda_2, f) = \{\mathcal{O}\}$$

(iii) Bei Basiswechsel, beschrieben durch $S \in GL_n(K)$, d.h. wenn man Matrix A durch ähnliche Matrix $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$ ersetzt, ändert sich das charakteristische Polynom nicht, denn nach Determinantenmultiplikationssatz gilt:

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda \cdot E) = \det(S \cdot A \cdot S^{-1} - \lambda \cdot E) \\ &= \det(S \cdot A \cdot S^{-1} - S \cdot \lambda \cdot E \cdot S^{-1}) \\ &= \det(S \cdot (A - \lambda \cdot E) \cdot S^{-1}) \\ &= \det(S) \cdot \det(A - \lambda \cdot E) \cdot \det(S^{-1}) \\ &= P_A(\lambda) \cdot \det \underbrace{(S \cdot S^{-1})}_{=E} = P_A(\lambda) \end{aligned}$$

8.10. Satz

Ähnliche Matrizen besitzen dasselbe charakteristische Polynom.
Es ist daher sinnvoll, jedem Endomorphismus $f: V \to V$ ein charakteristisches Polynom zuzuordnen:

$$P_f(\lambda) \coloneqq P_A(\lambda)$$

für eine und damit alle f darstellenden Matrizen A.

Somit:

$$\lambda \text{ Eigenwert von } f \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$$

8.11. Folgerung

Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind daher charakteristische Größen für einen Endomorphismus f.
Für darstellende Matrix $A = (a_{ij})$

$$P_A(\lambda) = \det(A \cdot \lambda \cdot E) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda^1 + a_0$$

Daher $a_0 = P_A(0) = \det A$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Formel von Leibniz für Determinanten:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

In Formel von Leibniz für Determinanten sind Potenzen λ^n und λ^{n-1} nur im Term

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\cdot(a_{22}-\lambda)\cdot\ldots\cdot(a_{nn}-\lambda) &= (-\lambda)^n + a_{11}\cdot(-\lambda)^n + \cdots + a_{nn}\cdot(-\lambda)^n + \text{Rest} \\ &= (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\cdot(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\cdot\lambda^{n-1} + \text{Rest}\end{aligned}$$

enthalten, d.h. $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\cdot(a_{11}+\cdots+a_{nn})$

8.12. Definition

Sei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Dann heißt

$$\operatorname{Spur} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

die **Spur** der Matrix A.

8.13. Korollar

Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante und dieselbe Spur.
Daher ist sinnvoll:

8.14. Definition

Sei f ein Endomorphismus mit darstellender Matrix A.

$$\operatorname{Spur} f := \operatorname{Spur} A \;\text{ und }\; \det f := \det A$$

8.15. Beispiel (vgl. 8.3)

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 34 \\ -4 & 1 & -20 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Spur} A = 9 + 1 - 4 = 6$$

In der Tat gilt:

$$\operatorname{Spur} B = \operatorname{Spur} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix} = 6 = \operatorname{Spur} A$$

Weiter gilt nach 8.6:

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

also Koeffizienten zu λ^2: $6 = (-1)^2 \cdot \operatorname{Spur} A$

8.16. Eigenschaften der Spur

$$A, B \in M_n(K), \lambda \in K$$

(i) $\operatorname{Spur}(A + B) = \operatorname{Spur} A + \operatorname{Spur} B$
(ii) $\operatorname{Spur}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \operatorname{Spur} A$

d.h. Spur: $M_n(K) \to K$ linear

(iii) $\operatorname{Spur}(A \cdot B) = \operatorname{Spur}(B \cdot A)$

8.17. Definition

Sei f Endomorphismus mit darstellender Matrix $A \in M_n(K)$.

(i) Sei λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P_f = P_A$ der Vielfachheit k. Dann heißt k die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts λ.
(ii) Die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert λ

$$\dim \operatorname{Eig}(\lambda, f)$$

heißt die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwert λ.

Es gilt:

8.18. Satz

Sei λ Eigenwert eines Endomorphismus f.
Dann gilt

$$\text{geometrische Vielfachheit von } \lambda \leq \text{algebraische Vielfachheit von } \lambda$$

Beweis:
Sei $r = \dim \operatorname{Eig}(\lambda, f)$ geometrische Vielfachheit von λ.

Wähle Basis $v_1, \dots, v_r$ von $\operatorname{Eig}(\lambda, f)$ und ergänze zu Basis $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ von V ($n = \dim V$).

Darstellende Matrix bzgl. dieser Basis

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A' \end{array}\right) \Rightarrow P_f(t) = P_A(t) = \det(A - t \cdot E_n)$$

$$\overset{7.12}{=} \det \begin{pmatrix} \lambda - t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - t \end{pmatrix} \cdot \det(A' - t \cdot E_{n-r}) = (\lambda - t)^r \cdot P_{A'}(t)$$

$\Rightarrow \lambda$ ist Nullstelle von P_f der Vielfachheit $\geq r$. ■

8.19. Definition

Ein Endomorphismus f bzw. die darstellende Matrix $A \in M_n(K)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

8.20. Satz

Ein Endomorphismus f bzw. die darstellende Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren von f bzw. A gibt.

Beweis: f diagonalisierbar

$\Rightarrow f$ wird bzgl. geeigneter Basis $e_1, \dots, e_n$ dargestellt durch

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow f(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$ mit $i = 1, \dots, n$ d.h. $e_1, \dots, e_n$ ist Basis aus Eigenvektoren.

8.21. Bemerkung

Die Diagonale der darstellenden Diagonalmatrix enthält gerade die Eigenwerte von f entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit.

$$P_f(\lambda) = P_D(\lambda) = \det(D - \lambda \cdot E) = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)}_{\text{Linearfaktorzerlegung}}$$

Frage: Ist jede Matrix diagonalisierbar?

8.22. Beispiele

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

P_A besitzt keine reellen Nullstellen.
⇒ A besitzt keine reellen Eigenwerte und Eigenvektoren
⇒ A kann nicht diagonalisiert werden

(ii)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 \text{ doppelte Nullstelle bei } 0.$$

⇒ A besitzt genau einen Eigenwert $\lambda = 0$.

algebraische Vielfachheit $= 2$

Berechne Eigenraum

$$(A - 0 \cdot E) \cdot x = A \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot x_2 = 0 \\ \quad 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_1 \text{ beliebig} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Eig}(0, A) = \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

⇒ geometrische Vielfachheit von Eigenwert $\lambda = 0$: $\dim \operatorname{Eig}(0, A) = 1$
⇒ Es gibt keine zwei linear unabhängigen Eigenvektoren von A.
⇒ A ist nicht diagonalisierbar.

D.h. es gibt zwei Hindernisse für die Diagonalisierbarkeit:

(i) Es gibt nicht genug Eigenwerte.
(ii) Geometrische Vielfachheit $<$ algebraische Vielfachheit

Es gilt:

8.23. Satz

Ein Endomorphismus f bzw. die darstellende Matrix $A \in M_n(K)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn gilt:

(i) P_A zerfällt in Linearfaktoren

$$P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

(d.h. alle n möglichen Eigenwerte sind in K)

(ii) Algebraische und geometrische Vielfachheiten der Eigenwerte sind jeweils gleich.

Beweis:
„⇒“ $P_A = P_D$

„⇐“ Aus (i):

$$P_A = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i \cdot \lambda)^{n_i}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ die Eigenwerte von A mit algebraischen Vielfachheiten n_i.

$$\Rightarrow n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$$

Aus (ii) ⇒ Jeder Eigenraum $\mathrm{Eig}(\lambda, A)$ Basis

$$v_{i,1}, \ldots, v_{i,n_i} \quad i = 1, \ldots, r$$

$$\overset{8.8}{\Rightarrow} v_{1,1}, \ldots, v_{1,n_1}, v_{2,1}, \ldots, v_{2,n_2}, \ldots, v_{r,1}, \ldots, v_{r,n_r}$$

sind $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ linear unabhängige Eigenvektoren.

D.h. Basis aus Eigenvektoren $\overset{8.20}{\Longrightarrow} A$ diagonalisierbar. ■

8.24. Korollar

Besitzt $A \in M_n(K)$ genau n einfache Nullstellen, so ist A diagonalisierbar.

Beweis: In 8.23, (i) ist erfüllt.
Weiter: λ Eigenwert ⇒ $\dim \mathrm{Eig}(\lambda, A) \geq 1$

$1 \leq$ geometrische Vielfachheit von $\lambda \leq$ algebraische Vielfachheit von $\lambda = 1$
also alles gleich 1 ⇒ $8.23(\mathrm{ii})$ erfüllt. ■

8.25. Korollar

Ein Endomorphismus $f: V \to V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn

$$V = \mathrm{Eig}(\lambda_1, f) \oplus \mathrm{Eig}(\lambda_2, f) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Eig}(\lambda_r, f)$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von f sind.

Beweis: Folgt aus 8.20.

8.26. Korollar

Für zwei **diagonalisierbare** Matrizen A und B sind äquivalent

(i) A und B sind ähnlich
(ii) A und B besitzen dieselben Eigenwerte mit jeweils derselben Vielfachheit.
(iii) $P_A = P_B$

Beweis: Beachte: A, B diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ algebraische und geometrische Vielfachheiten gleich.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): $P_A = P_B \Leftrightarrow P_A$ und P_B besitzen dieselben Nullstellen mit jeweils der gleichen Vielfachheit.

(i) $\Rightarrow$ (iii): 8.10.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach Voraussetzung: A und B ähnlich zu Diagonalmatrizen D_A und D_B.

(ii) $\Rightarrow$ D_A und D_B besitzen dieselben Einträge auf der Diagonalen (in eventuell verschiedener Reihenfolge).

$\Rightarrow$ Basiswechsel gegeben durch Vertauschen von Basisvektoren zeigt:

$$D_A \text{ ähnlich } D_B \Rightarrow A \text{ ähnlich } B \ \blacksquare$$

8.27. Verfahren zu Diagonalisierung einer Matrix A

Sei $A \in M_n(K)$

1. Bestimme charakteristisches Polynom $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E)$
2. Bestimme Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ vonP_A, d.h. Eigenwerte

   Falls weniger als n Eigenwerte (gezählt entsprechend ihren algebraischen Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_r$) d.h. wenn $k_1 + k_2 + \cdots + k_r < n$

   $\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar. **Stopp**.

3. Bestimme Eigenräume $\mathrm{Eig}(\lambda_i, A)$ als Lösungsräume der homogenen Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_i \cdot E) \cdot x = 0$$

Falls geometrische Vielfachheit $\dim \mathrm{Eig}(\lambda_i, A) <$ algebraische Vielfachheit k_i für mindestens ein $i = 1, \dots, r$

$\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar. **Stopp**.

Sonst: A ist diagonalisierbar.

4. A ähnlich zu Diagonalmatrix $D = S \cdot A \cdot S^{-1}$

D enthält die Eigenwerte λ_i auf der Diagonalen entsprechend ihren Vielfachheiten

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

5. Bestimmung der Basiswechselmatrix S

Bestimme für jeden Eigenwert λ_i eine Basis $v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i} \in K^n$ des Eigenraums $\mathrm{Eig}(\lambda_i, A)$ mit $i = 1, \dots, r$.

Trage die Vektoren

$$\underbrace{v_{1,1}, \dots, v_{1,k_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,k_2}, \dots, v_{r,k_r}}_{\text{Basis des } K^n \text{ aus Eigenvektoren von } A}$$

als Spalten in Matrix $S^{-1} \in M_n(K)$

$$\Rightarrow S = (S^{-1})^{-1}\colon\ D = S \cdot A \cdot S^{-1}$$

Fazit: Eine Matrix A ist diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt und die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen ist.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda(2+\lambda)(3-\lambda) + 6 + 6 - 2(2+\lambda)\cdot 1 - 6\lambda - 3(3-\lambda) \\
&= (2\lambda + \lambda^2)(3-\lambda) + 12 - 4 - 2\lambda - 6\lambda - 9 + 3\lambda \\
&= 6\lambda - 2\lambda^2 + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 1 - 5\lambda \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1
\end{aligned}$$

$$P_A(1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\quad(-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1) \div (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 1 = -(\lambda-1)(\lambda+1) \\
\underline{-(-\lambda^3 + \lambda^2)} \\
\qquad\qquad\quad \lambda - 1 \\
\qquad\qquad \underline{-(\lambda - 1)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Eigenwerte:
$\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2
$\lambda_2 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 1

$\mathrm{Eig}(1, A)$: $(A - 1 \cdot E) \cdot x = 0$

$$A - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2 = \mu_1, x_3 = \mu_2$ freie Parameter

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 + x_3 = -\mu_1 + \mu_2$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} -\mu_1 + \mu_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Basis von } \mathrm{Eig}(1, A)$$

geometrische Vielfachheit: 2

$\mathrm{Eig}(-1, A)$: $(A + 1 \cdot E) \cdot x = 0$

$$A + 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_3 = \mu_3$ freier Parameter

$$2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}x_3 = \frac{3}{2}\mu_3$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3 = \frac{3}{2}\mu_3 - \mu_3 = \frac{1}{2}\mu_3$$

$$\Rightarrow v_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ Basis von } \mathrm{Eig}(-1, A)$$

geometrische Vielfachheit: 1

$\Rightarrow A$ diagonalisierbar, ähnliche Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zugehörige Basiswechselmatrix $S \in GL_3(\mathbb{R})$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S = (S^{-1})^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$V = \mathrm{Eig}(\lambda_1, A) \oplus \mathrm{Eig}(\lambda_2, A) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Eig}(\lambda_r, A) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}(\lambda_i, A)$$

9. Normalform eines Endomorphismus

9.1. Definition

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ heißt obere (bzw. untere) **Dreiecksmatrix**, wenn sie von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ bzw. } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist.

9.2. Bemerkung

Für Dreiecksmatrix A gilt:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$$

d.h. P_A zerfällt in Linearfaktoren und die Eigenwerte λ_i stehen auf der Diagonalen.

9.3. Definition

Eine Matrix $A \in M_n(K)$ bzw. der durch sie dargestellte Endomorphismus heißt **trigonalisierbar**, wenn A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist.

9.4. Bemerkung

Wenn ein Endomorphismus f trigonalisierbar ist und A darstellende obere Dreiecksmatrix ist bzgl. Basis $e_1, \dots, e_n$, so bedeutet dies, dass die Teilräume

$$V_i = \operatorname{lin}\{e_1, e_2, \dots, e_i\} \quad i = 1, \dots, n$$

(aufsteigende Folge von Teilräumen in V. Vergleiche „Fahne“)
invariante Teilräume sind.

$$f(V_i) \subset V_i$$

denn $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{matrix}} & * \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda_{i+1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{matrix}} \end{pmatrix}$ hat Blockstruktur.

Nicht jede Matrix ist trigonalisierbar.

Zerfällt aber das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ in Linearfaktoren (Bedingung (i) in 8.23), so gilt:

9.5. Satz

Sei $A \in M_n(K)$. A ist genau dann trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom P_A in Linearfaktoren zerfällt, d.h.

$$P_A(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n), \lambda_i \in K$$

Beweis:

„⇒“: A ähnlich zu oberer Dreiecksmatrix B

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = P_B(\lambda) \overset{9.2}{=} \pm \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

„⇐“: Induktion nach n:

Induktionsanfang $n = 1$: Nichts zu beweisen.

Induktionsschritt $n - 1 \to n$:

Wähle Eigenvektor v_1 zu Eigenwert λ_1 und ergänze zu Basis $v_1, w_2, \ldots, w_n$ von V.

Darstellende Matrix von $f(x) = A \cdot x$ bzgl. dieser Basis

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\quad B' \quad} \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ mit } B' \in M_{n-1}(K)$$

$$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & * \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{B' - \lambda \cdot E_{n-1}} \\ 0 & \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \cdot P_{B'}(\lambda)$$

Andererseits

$$P_B(\lambda) = P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

$$\Rightarrow P_{B'}(\lambda) = \prod_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda)$$

B' beschreibt lineare Abbildung f' auf den $n-1$-dimensionalen Raum

$$W = \operatorname{lin}\{w_2, \dots, w_n\}$$

mit

$$f' : W \to W$$

Induktionsannahme: ⇒ Nach Basiswechsel $w_2, \dots, w_n \to w_2', \dots, w_n'$ wird f' durch obere Dreiecksmatrix B'' beschrieben.

⇒ Darstellende Matrix von f bzgl. Basis $v_1, w_2', \dots, w_n'$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * & \\ 0 & & & * \\ \vdots & & B'' & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

d.h. A ist ähnlich zu oberer Dreiecksmatrix. ■

Aus Fundamentalsatz der Algebra (im Körper $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren) folgt:

9.6. Korollar

Jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ bzw. der durch sie dargestellte Endomorphismus ist trigonalisierbar.

9.7. Verfahren zur Trigonalisierung

Sei V ein K-VR mit Basis $e_1, \dots, e_n$, $f: V \to V$ Endomorphismus und $A \in M_n(K)$ darstellende Matrix, derart, dass

$$P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

in Linearfaktoren zerfällt.

Wähle zu Eigenwert λ_1 einen Eigenvektor v_1.

Ersetze dann einen der Vektoren $e_1, \dots, e_n$ durch v_1.

(genauer: für $v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot e_i$ ersetze ein e_i mit $\alpha_i \neq 0$)

Neue Matrix nach Basiswechsel

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{A_2} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

mit $A_2 \in M_{n-1}(K)$, $P_{A_2}(\lambda) = (\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$.

$\Rightarrow$ A_2 beschreibt trigonalisierbaren Endomorphismus f_2 auf $V_2 := \mathrm{lin}\{w_2, \ldots, w_n\}$.

Nun wie oben:

Wähle Eigenvektor v_2 zu Eigenwert λ_2 von f_2.
Ersetze einen der Vektoren $w_2, \ldots, w_n$ durch v_2, so dass neue Basis

$$v_1, v_2, w_3', \ldots, w_n'$$

von V entsteht.

Darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * & \ldots \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * & \ldots \\ \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{A_3} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \text{ mit } A_3 \in M_{n-2}(K)$$

Dann rekursiv weiter $\Rightarrow$ nach endlich vielen Schritten: Dreiecksmatrix.

9.8. Beispiel

$f(x) = A \cdot x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

charakteristisches Polynom:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & 3 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 2)^3$$

$\Rightarrow$ (über $\mathbb{R}$) trigonalisierbar

Eigenvektor zu Eigenwert 2 bestimmen:

$$(A - 2 \cdot E) \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Eig}(2, A) = 1$ und Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Basiswechsel: z.B: $\underbrace{(e_1, e_2, e_3)}_{\text{kan. Basis}} \to (v_1, e_2, e_3)$

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1 \cdot A \cdot S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Setze $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ (beschränkt lineare Abbildung auf $\operatorname{lin}\{e_2, e_3\}$)

$\Rightarrow P_{A_2}(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ Eigenvektor: Es gilt $A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow v_2 = 1 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3 = e_2 - e_3$$

Basiswechsel z.B. $(v_1, e_2, e_3) \to (v_1, v_2, e_3)$

Basiswechselmatrix

$$S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9.9. Bemerkung

Wenn für $A \in M_n(K)$ $P_A(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt, aber für mindestens einen der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ geometrische Vielfachheit $<$ algebraische Vielfachheit, so folgt

$$\underbrace{\operatorname{Eig}(\lambda_1, A) \oplus \operatorname{Eig}(\lambda_2, A) \oplus \dots \oplus \operatorname{Eig}(\lambda_r, A)}_{\dim < n} \underset{\dim V = n}{\subsetneq} V$$

$\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar, keine Eigenraumzerlegung. Es gibt aber verallgemeinerte Eigenraumzerlegung.

9.10. Definition

Sei V K-VR, $f: V \to V$ Endomorphismus und λ Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit k. Dann heißt

$$E_\lambda = E_\lambda(f) := \ker[(f - \lambda \cdot \mathrm{id})^k]$$

verallgemeinerter Eigenraum oder **Hauptraum** zum Eigenwert λ.

Beachte, dass stets

$$\begin{array}{lccccc} & \ker(f-\lambda\cdot\mathrm{id}) & \subset \ker[(f-\lambda\cdot\mathrm{id})^2] \subset \cdots \subset & \ker[(f-\lambda\cdot\mathrm{id})^k] \\ \text{also} & \| & & \| \\ & \mathrm{Eig}(\lambda, f) & \subset & E_\lambda(f) \end{array}$$

Nun gilt

9.11. Satz (Verallgemeinerte Eigenraumzerlegung)

Sei V K-VR, $\dim V = n$, $f: V \to V$ Endomorphismus, derart, dass charakteristisches Polynom $P_f(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die Eigenwerte von f mit algebraischen Vielfachheiten $k_1, \dots, k_r$.
Dann gilt:

(i) $\dim E_{\lambda_i} = k_i \quad i = 1, \dots, r$

(ii) $V = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$

(iii) Jedes E_{λ_i} ist invarianter Teilraum

$$f\left(E_{\lambda_i}\right) \subset E_{\lambda_i} \quad i = 1, \dots, r$$

Beweise:

(i) 9.5 $\Rightarrow$ f ist bzgl. Geeigneter Basis $v_1, \dots, v_n$ dargestellt durch obere Dreiecksmatrix

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & * & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda_1 & \\ \hline & 0 & & D \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} k_1 \text{ Zeilen} \\ \vphantom{0} \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{k_1 \text{ Spalten}}$$

mit $D \in M_{n-k_1}(K)$ obere Dreiecksmatrix mit restlichen Eigenwerten auf Diagonalen.

Betrachte Endomorphismus

$$g := f - \lambda \cdot \mathrm{id}$$

darstellende Matrix

$$B = A - \lambda_1 \cdot E = \left(\begin{array}{c|c} N^{k_1} & * \\ \hline 0 & D^{k_1} \end{array}\right)$$

und $D_1 = D - \lambda_1 \cdot E_{n-k_1} \in M_{n-k_1}(K)$ obere Dreiecksmatrix mit von 0 verschiedenen Einträgen auf Diagonalen.

$$\Rightarrow \operatorname{rang} D_1 = n - k_1, \ \ D_1 \in GL_{n-k_1}(K)$$

Somit

$$(f - \lambda \cdot \mathrm{id})^{k_1} = g^{k_1}$$

wird dargestellt durch Matrix

$$B^{k_1} = \left(\begin{array}{c|c} N^{k_1} & * \\ \hline 0 & D^{k_1} \end{array}\right)$$

aber wegen Gestalt von N, d.h.

$$g(v_1) = 0, g(v_2) \in \operatorname{lin}\{v_1\}, g(v_3) \in \operatorname{lin}\{v_1, v_2\} \dots$$
$$g\left(v_{k_1}\right) \in \operatorname{lin}\left\{v_1, \dots, v_{k_1-1}\right\}$$

folgt $N^{k_1} = 0$

$$\Rightarrow B^{k_1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & D_1^{k_1} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang} B^{k_1} = \operatorname{rang} B_1^{k_1} = n - k_1$$

Daher mit Dimensionsformel

$$\begin{aligned}\dim E_{\lambda_1} &= \dim\ker[(f-\lambda_1\cdot\mathrm{id})^{k_1}] = \dim\ker g^{k_1}\\ &= n - \dim\operatorname{im} g^{k_1} = n-(n-k_1) = k_1\end{aligned}$$

(ii) Seien $\lambda \neq \lambda'$ Eigenwerte und $v \in E_\lambda \cap E_{\lambda'}$
Wir zeigen: $v = 0$

Denn dann:

$$E_{\lambda_1}+\cdots+E_{\lambda_r} = \underbrace{E_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus E_{\lambda_r}}_{\text{Dim: } k_1+\cdots+k_r=n=\dim V}$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus E_{\lambda_r} = V$$

Annahme: Es gibt $v \in (E_\lambda \cap E_{\lambda'}) \setminus \{\mathcal{O}\}$
Seien $k, k' \in \mathbb{N}$ minimal mit

$$(f-\lambda\cdot\mathrm{id})^k(v) = \mathcal{O} = (f-\lambda'\cdot\mathrm{id})^{k'}(v)$$

Ohne Einschränkung $k \leq k'$. Setze $g = f - \lambda\cdot\mathrm{id}$.

Dann sind $v, g(v), g^2(v), \ldots, g^{k-1}(v)$ linear unabhängig.

Denn

$$\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\cdot g^i(v) = 0 \underset{\text{anwenden}}{\overset{g^{k-1}}{\Longrightarrow}} \alpha_0\cdot g^{k-1}(v) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

also

$$\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\cdot g^i(v) = 0 \underset{\text{anwenden}}{\overset{g^{k-2}}{\Longrightarrow}} \alpha_1\cdot g^{k-1}(v) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

usw.

$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad i = 0,\ldots,k-1$$

$$\begin{aligned}0 &= (f-\lambda'\cdot\mathrm{id})^{k'}(v) = (g+(\lambda-\lambda')\cdot\mathrm{id})^{k'}(v)\\ &= \sum_{j=0}^{k'}\binom{k'}{j}(\lambda-\lambda')^{k'-j}\cdot\underbrace{g^j(v)}_{\substack{=0 \text{ für}\\ j\geq k}} = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k'}{j}(\lambda-\lambda')^{k'-j}\cdot\underbrace{g^j(v)}_{\text{lin. unabhängig}}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda-\lambda' = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda'$ Widerspruch

(iii) Sei λ Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit k und $v \in E_\lambda$

$$\begin{aligned}(f-\lambda\cdot\mathrm{id})\big(f(v)\big) &= (f-\lambda\cdot\mathrm{id})^k(f-\lambda\cdot\mathrm{id})(v) + (f-\lambda\cdot\mathrm{id})^k(\lambda v)\\ &= (f-\lambda\cdot\mathrm{id})^{k+1}(v) + \lambda\cdot(f-\lambda\cdot\mathrm{id})^k(v)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(v) \in E_\lambda \quad \blacksquare$$

9.12. Bemerkung

Sei f wie in 9.11.
Wählt man Basis, angepasst an verallgemeinerte Eigenraumzerlegung

$$\underbrace{v_{1,1},\dots,v_{1,k_1}}_{\text{Basis von } E_{\lambda_1}}, v_{2,1},\dots,v_{2,k_2},\dots,\underbrace{v_{r,1},\dots,v_{r,k_r}}_{\text{Basis von } E_{\lambda_r}}$$

So besitzt die darstellende Matrix Blockstruktur

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

Mit $A_i \in M_{k_i}(K)$ und $P_{A_i}(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{k_i}$

$\overset{9.5}{\Rightarrow}$ mit geeigneter Basis in jedem E_λ kann jedes A_i sogar als obere Dreiecksmatrix gewählt werden.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1\end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2\end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_r & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

9.13. Bemerkung

Sind Matrizen A und B ähnlich, wenn jeweils algebraische und geometrische Vielfachheiten gleich sind? Antwort: Nein.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = \lambda^4 \Rightarrow \lambda = 0$ Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 4.

$$\dim \operatorname{Eig}(0, A) = \dim \ker(A - 0 \cdot E) = 4 - \underbrace{\operatorname{rang} A}_{= \dim \operatorname{im} A} = 4 - 2 = 2$$

$$\dim \operatorname{Eig}(0, B) = 2$$

Wenn nun A und B änhlich $\Rightarrow A^2$, B^2 ähnlich (beschreiben $f^2 = f \circ f$).

Aber wegen

$$Ae_1 = 0, Ae_2 = e_1, Ae_3 = 0, Ae_4 = e_3 \Rightarrow A^2 = 0$$

$$Be_1 = 0, Be_2 = e_1, Be_3 = e_2, Be_4 = 0 \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A^2$ und B^2 sind nicht ähnlich $\Rightarrow A$ und B sind nicht ähnlich

Finde „Normalform" in jeder Klasse änhlicher Matrizen.
Betrachte dazu verallgemeinerte Eigenräume einzeln.

Sei also nach 9.5 ohne Einschränkung

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

$$\Rightarrow A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

dann ist

$$(A - \lambda E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, (A - \lambda E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & * \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

somit: $A - \lambda E$ **nilpotent**, d.h. $(A - \lambda)^n = 0$.

Es gibt also (kleinstes) $k \leq n$ mit $(A-\lambda E)^k = 0$, aber $(A-\lambda E)^{k-1} \neq 0$.

Wähle ein $v \in K^n$

$$e_1 := v, e_2 := (A-\lambda E)v, \dots, e_n := (A-\lambda E)^{k-1}v \neq 0$$

Im Beweis von 9.11 haben wir gesehen, dass $e_1, \dots, e_k$ linear unabhängig sind.

Sei $U := \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_k\}$
Sei $W \subset K^n$ ein maximaler Teilraum mit
(i) $W \cap U = \{\mathcal{O}\}$
(ii) $(A-\lambda E)W \subset W$ (Invarianz)

9.14. Lemma

Dann gilt für $U \oplus W = K^n$.

Beweis:

Sei $B := A - \lambda E$

Annahme:

$U \oplus W \neq K^n \Rightarrow$ Es gilt $v_1 \in K^n \setminus (U \oplus W)$

B wiederholt auf v_1 anwenden:

$$\underbrace{v_1}_{\notin U \oplus W}, Bv_1, \dots, \underbrace{\underbrace{B}_{=0} v_1}_{=\mathcal{O} \in U \oplus W}$$

Also gibt es $v_2 \notin U \oplus W$, aber $Bv_2 \in U \oplus W$

$$\Rightarrow Bv_2 = \underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in W}$$

$$0 = \underbrace{B^k}_{=0} v_2 = B^{k-1}(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + w) = \lambda_1 \underbrace{B^{k-1} e_1}_{\substack{=e_k \in U \\ e_k \neq \mathcal{O}}} + \underbrace{B^{k-1} w}_{\in W}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

Also $Bv_2 = \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k + w = B\underbrace{(\lambda_2 e_1 + \dots + \lambda_k e_{k-1})}_{=: u \in U} + w$

und mit $v := v_2 - u$

$$\xRightarrow{\substack{u\in(U\oplus W)\\ v_2\notin(U\oplus W)}} v \in K^n \setminus (U \oplus W) \Rightarrow v \notin W, \text{ aber } Bv = Bv_2 - Bu = Bu + w = w \in W$$

Setzt man

$$\widetilde{W} = W \oplus \operatorname{lin}\{v\},$$

so folgt für jedes

$$\widetilde{w} = w + \lambda \cdot v = w \in W$$

$$B\widetilde{w} = Bw + \lambda \cdot Bv \in W \subset \widetilde{W}$$

und für $\widetilde{w} \in \widetilde{W} \cap U$

$$\widetilde{w} = w + \lambda \cdot v = u \in U$$

$$\Rightarrow \lambda v = u - w \in U \oplus W \xRightarrow{v\notin U\oplus W} \lambda = 0 \Rightarrow \widetilde{w} = w \in W \cap U = \{\mathcal{O}\}$$

$\Rightarrow \widetilde{w} = \mathcal{O}$

$\Rightarrow \widetilde{W}$ erfüllt Vorraussetzungen (i) und (ii) im Lemma. Widerspruch zur Maximalität von W. ■

Passe Basis von K^n an die Zerlegung $K^n = U \oplus W$ an (insbesondere wähle $e_k, e_{k-1}, \dots, e_1$ als Basis in U).

$\Rightarrow$ darstellende Matrix

$$\begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 1 & 0 & & 0 & \\
 & 0 & 1 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & 0 \\
 & & & \ddots & 1 & \\
0 & & & & 0 & \\
\hline
 & & & & & \\
 & & 0 & & & \tilde{B} \\
 & & & & &
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} k \text{ Zeilen} \\ \vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}} \end{array} \\
\underbrace{\hphantom{0\;1\;0\;\ddots\;0\;0}}_{k \text{ Spalten}} \hphantom{\tilde{B}\;\tilde{B}\;\tilde{B}} &
\end{array}$$

mit $\tilde{B} \in M_{n-k}(K)$ nilpotent.

Verfahren rekursiv auf $\tilde{B}$ fortsetzen:

⇒ bei passendem Basiswechsel: Zu B ähnliche Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \boxed{} & & & 0 \\ & \boxed{} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{} \end{pmatrix}$$

wobei jedes Kästchen die Form

$$\boxed{} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

9.15. Definition

Eine Matrix

$$J_k(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

heißt $k \times k$-**Jordan-Kästchen**.

⇒ ursprüngliche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = B + \lambda E$$

ist ähnlich zu Matrix

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{k_2}(\lambda)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{k_l}(\lambda)} \end{pmatrix}$$

Führt man dieses Verfahren für jeden verallgemeinerten Eigenraum durch, so erhält man:

9.16. Satz (Jordansche Normalform JNF)

Sei $A \in M_n(K)$, derart, dass das charakteristische Polynom

$$P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - \lambda)^{k_r}$$

in Linearfaktoren zerfällt. Dann ist A ähnlich zu einer Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \square & & & 0 \\ & \square & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \square \end{pmatrix}$$

wobei jedes Kästchen $\square$ ein Jordan-Kästchen $J_k(\lambda_i)$ zum Eigenwert λ_i ist.

Die Anzahl der Jordan-Kästchen $J_k(\lambda_i)$ der Größe $k \times k$ zu jedem Eigenwert λ_i ist dabei eindeutig bestimmt (d.h. JNF ist eindeutig, bis auf Reihenfolge der Kästchen).

9.17. Korollar

Zwei Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie dieselben Eigenwerte und in der JNF dieselbe Anzahl von Jordan-Kästchen gleicher Größe besitzen.

9.18. Bemerkungen

(i) Sei $m_k(\lambda) :=$ Anzahl der $k \times k$-Jordan-Kästchen $J_k(\lambda)$ zum Eigenwert λ.

$\rightarrow$ Jedes $J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ liefert einen Eigenvektor zum Eigenwert λ.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k(\lambda) \text{ ist geometrische Vielfachheit vom EW } \lambda.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot m_k(\lambda) \text{ ist algebraische Vielfachheit vom EW } \lambda.$$

(ii) Es gilt

$$J_k(\lambda_0) - \lambda E = J_k(\lambda_0 - \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 - \lambda \end{pmatrix}$$

Also:

$\lambda \neq \lambda_0 \Rightarrow \operatorname{rang} J_k(\lambda_0 - \lambda) = k \;\; J_k(\lambda_0 - \lambda) \in GL_k(K)$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}[J_k(\lambda_0 - \lambda)]^l = k$$

$$\lambda = \lambda_0 \Rightarrow J_k(\lambda_0 - \lambda) = J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [J_k(0)]^2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}[J_k(0)]^l = \begin{cases} k - l & l < k \\ 0 & l \geq k \end{cases}$$

$\Rightarrow$ bildet man aufsteigend Potenzen von $A - \lambda E$

$$r_k(\lambda) := \operatorname{rang}(A - \lambda E)^k \quad k = 0,1,\dots,n$$

so reduziert sich in jedem Schritt $r_{k-1}(\lambda) \to r_k(\lambda)$ die Anzahl der Jordan-Kästchen zum Eigenwert λ, die größer gleich $k \times k$ sind.

$$r_{k-1}(\lambda) - r_k(\lambda) = m_k(\lambda) - \big(r_k(\lambda) - r_{k+1}(\lambda)\big) = r_{k-1}(\lambda) - 2 \cdot r_k(\lambda) + r_{k+1}(\lambda)$$

Somit: Formel zur Berechnung von $m_k(\lambda)$

$$\boxed{m_k(\lambda) = \operatorname{rang}(A - \lambda E)^{k-1} - 2 \cdot \operatorname{rang}(A - \lambda E)^k + \operatorname{rang}(A - \lambda E)^{k+1}}$$

Dies zeigt insbesondere die Eindeutigkeit der JNF in Satz 9.16.

9.19. Korollar

Zwei Matrizen $A, B \in M_n(K)$ sind genau dann ähnlich, wenn für alle Eigenwerte λ gilt

$$\operatorname{rang}[(A - \lambda E)^k] = \operatorname{rang}[(B - \lambda E)^k] \quad k = 1,\dots,n$$

9.20. Bemerkungen

Mit $r_j(\lambda) \coloneqq \operatorname{rang}\left[(A-\lambda E)^j\right]$ gilt für Eigenwert λ von $A \in M_n(K)$ der algebraischen Vielfachheit k.

(i) $r_k(\lambda) = r_{k+1}(\lambda) = \cdots = n-k$

(ii) Die Folge

$$r_0(\lambda) = n, r_1(\lambda), \dots, r_{k-1}(\lambda), r_k(\lambda)$$

ist streng monoton fallend, bis sie den Wert $n-k$ erreicht.

(iii) Das kleinste j_0 mit $r_{j_0}(\lambda) = n-k$ ist die Größe des größten Jordan-Kästchens $J_{j_0}(\lambda)$.

(iv) $r_0(\lambda) - r_1(\lambda) = n - \operatorname{rang}[(A-\lambda E)^1] = \dim\ker(A-\lambda E)$

Also:

$$\begin{aligned} r_0(\lambda) - r_1(\lambda) &= \text{geometrische Vielfachheit des EW } \lambda \\ &= \text{Anzahl der Jordan-Kästchen zum EW } \lambda \end{aligned}$$

9.21. Beispiele

(i) Bestimme JNF von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det &\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ -3 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-1-\lambda)^2 + 4 \\ &-3(-1-\lambda) - 2(3-\lambda) + 4(-1-\lambda) \\ &= (3-\lambda)(1+2\lambda+\lambda^2) + 10 - 3 - 3\lambda - 4 - 4\lambda \\ &= 3 + 6\lambda + 3\lambda^2 - \lambda - 2\lambda^3 - \lambda^3 - 3 - 5\lambda \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ einfacher EW $\Rightarrow \operatorname{Eig}(1, A) = E_1(A)$ eindimensional $\Rightarrow m_1(1) = 1$

$\lambda_2 = 0$ doppelter EW $\Rightarrow \dim E_0(A) = 2$

Zwei Möglichkeiten

$$\text{a) } \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \boxed{0} & \\ & \boxed{0} \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{\substack{m_1(0)=2 \\ m_2(0)=0}} \qquad \text{b) } \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{\substack{m_1(0)=0 \\ m_2(0)=1}}$$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A = 1 \qquad \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

Bestimme Rang von A

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$$

also liegt Fall b) vor:

$\Rightarrow$ JNF $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) Sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ähnlich?

Es ist $P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = (1-\lambda)^4$

$\Rightarrow \lambda = 1$ vierfacher Eigenwert

$$\operatorname{rang}(A - 1E) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\operatorname{rang}(B - 1E) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

(d.h. geometrische Vielfacheit ist jeweils $4 - 2 = 2$)

$$\operatorname{rang}[(A - 1E)^2] = \operatorname{rang}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\right] = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{rang}[(B - 1E)^2] = \operatorname{rang}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\right] = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

also sind A und B nicht ähnlich.

Jordansche Normalform:

zu A:

$$r_0(1) = 4 \xrightarrow{>} r_1(1) = 2 \xrightarrow{>} r_2(1) = 1 \xrightarrow{>} r_3(1) = 0 = r_4(1)$$

$4 - 2 = 2$ Jordan-Kästchen zum EW 1

größtes Kästchen ist 3×3

bleibt nur $\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

zu B:

$$r_0(1) = 4 \xrightarrow{>} r_1(1) = 2 \xrightarrow{>} r_2(1) = 0 = r_3(1) = r_{4(1)}$$

$4 - 2 = 2$ Jordan-Kästchen zum EW 1

größtes Kästchen ist 2×2

bleibt nur $\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$

9.22. Bemerkung

Sei λ Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit k.

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es. Jordan-Kästchen zum Eigenwert λ zu verteilen?
Beantwortet auch: Wie viele Klassen ähnlicher Matrizen gibt es, wenn die Eigenwerte mit algebraischen Vielfachheiten gegeben sind? (d.h., wenn man das charakteristische Polynom kennt)

$$k = 1 \quad \left(\boxed{J_1(\lambda)}\right) = \left(\boxed{\lambda}\right)$$

$$k = 2 \quad \begin{pmatrix} \boxed{J_1(\lambda)} & \\ & \boxed{J_1(\lambda)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_2(\lambda)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 1 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$k = 3 \quad \begin{pmatrix} \boxed{J_1(\lambda)} & & \\ & \boxed{J_1(\lambda)} & \\ & & \boxed{J_1(\lambda)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1(\lambda)} & \\ & \boxed{J_2(\lambda)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_3(\lambda)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

Tabelle

k	$m_1(\lambda)$	$m_2(\lambda)$	$m_3(\lambda)$	$m_4(\lambda)$	geom Vielf.	Möglichkeiten
1	1	-	-	-	1	1
2	2	0	-	-	2	2
	0	1	-	-	1	
3	3	0	0	-	3	3
	1	1	0	-	2	
	0	0	1	-	1	
4	4	0	0	0	4	5
	2	1	0	0	3	
	1	0	1	0	2	
	0	2	0	0	2	
	0	0	0	0	1	
5						7
10						42
100						190569292

9.23. Beispiel

Wie viele ähnliche Matrizen mit dem charakteristischen Polynom

$$P_A(\lambda) = \lambda^6 - 2\lambda^5 + \lambda^4$$

gibt es?

$$P_A(\lambda) = \lambda^4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^4(\lambda - 1)^2$$

⇒ Eigenwerte

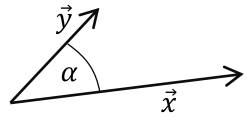
$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 0 \text{ mit algebraischer Vielfachheit } 4 \Rightarrow 5 \text{ Möglichkeiten} \\ \lambda_2 = 1 \text{ mit algebraischer Vielfachheit } 2 \Rightarrow 2 \text{ Möglichkeiten}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{insgesamt } 5 \cdot 2 = 10 \\ \text{Möglichkeiten}\end{array}$$

9.24. Korollar

Besitzen zwei Matrizen dieselben Eigenwerte mit denselben algebraischen und geometrischen Vielfachheiten und sind die algebraischen Vielfachheiten < 4, so sind sie ähnlich.

10. Skalarprodukte

In $\mathbb{R}^2$:



$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\alpha$$

10.1. Definition

Seien V, W K-Vektorräume. Eine Abbildung

$$b: V \times W \to K$$

heißt **Bilinearform**, wenn

$$\begin{aligned} b(v_1 + v_2, w) &= b(v_1, w) + b(v_2, w) \\ b(\lambda v, w) &= \lambda \cdot b(v, w) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b(v, w_1 + w_2) &= b(v, w_1) + b(v, w_2) \\ b(v, \lambda w) &= \lambda \cdot b(v, w) \end{aligned}$$

Im Fall $V = W$ heißt

$$q(v) \coloneqq b(v, v)$$

zugehörige **quadratische Form**.

Für $V = W$ heißt b **symmetrisch**, wenn

$$b(v, w) = b(w, v)$$

10.2. Darstellung in Koordinaten

Sind $\dim V, \dim W < \infty$ und $e_1, \dots, e_n$ Basis von V, $f_1, \dots, f_n$ Basis von W und

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V \quad w = \sum_{j=1}^{n} y_j f_j \in W$$

dann gilt mit den Koordinatenvektoren

$$x \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m, \quad y \coloneqq \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$$

$$\begin{aligned} b(v,w) &= b\left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{b\big(e_i, f_j\big)}_{=:a_{ij}} \cdot y_j \\ &= (x_1, \dots, x_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei

$$A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in M_{m,n}(K) \text{ mit } a_{ij} := b\big(e_i, f_j\big)$$

$$\boxed{b(v,w) = x^t \cdot A \cdot y} \qquad (x^t = x \text{ transponiert: Spalten} \leftrightarrow \text{Zeilen})$$

Rechenregeln für transponierte Matrizen

$$\begin{aligned} (A+B)^t &= A^t + B^t \\ (\lambda \cdot A)^t &= \lambda \cdot A^t \\ (A \cdot B)^t &= B^t \cdot A^t \end{aligned}$$

Es gilt daher:

$$\begin{aligned} b \text{ symmetrisch} &\Leftrightarrow b(v,w) = b(w,v) \\ &\Leftrightarrow x^t \cdot A \cdot y = \underbrace{y_t \cdot A \cdot x}_{\in K = M_1(K)} = (y^t \cdot A \cdot x)^t = x^t \cdot A^t \cdot y \\ &\Leftrightarrow A = A^t \end{aligned}$$

10.3. Definition

Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^t$ (d.h. $a_{ij} = a_{ji}$).

Es gilt also:

Bilinearform $x^t \cdot A \cdot y$ symmetrisch $\Leftrightarrow$ A symmetrisch

Sei nun V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum:

10.4. Definition

Sei $b: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform.
b bzw. die zugehörige quadratische Form q heißen

positiv definit, wenn $q(v) > 0$ für $v \neq \mathcal{O}$
negativ definit, wenn $q(v) < 0$ für $v \neq \mathcal{O}$
positiv semidefinit, wenn $q(v) \geq 0$
negativ semidefinit, wenn $q(v) \leq 0$
indefinit, wenn es $v_1, v_2 \in V$ gibt mit $q(v_1) < 0 < q(v_2)$

Eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ wird ebenfalls so bezeichnet, wenn die zugehörige Bilinearform $x^t \cdot A \cdot y$ die entsprechende Eigenschaft hat.

10.5. Beispiel

Sei $b(x,y) = x^t \cdot D \cdot y$ mit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ Diagonalmatrix.

$$b(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \cdot a_{ij} \cdot y_j$$

$$\Rightarrow q(x) = x^t \cdot D \cdot y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

also ist q bzw. D

positiv definit $\Leftrightarrow \lambda_i > 0$ für alle i
negativ definit $\Leftrightarrow \lambda_i < 0$ für alle i
positiv semidefinit $\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$ für alle i
negativ semidefinit $\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0$ für alle i
indefinit $\Leftrightarrow \exists \lambda_i, \lambda_j$ mit $\lambda_j < 0 < \lambda_i$

10.6. Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR. Ein **Skalarprodukt** auf V ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform:

$$\begin{aligned} \langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (v,w) &\mapsto \langle v,w \rangle \end{aligned}$$

Das Tupel $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ heißt dann ein **euklidischer Vektorraum**.

10.7. Beispiele

(i) $V = \mathbb{R}^n$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Standard-Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle x,y \rangle &:= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &= x^t \cdot y = x^t \cdot E_n \cdot y \end{aligned}$$

Bilinearform mit Einheitsmatrix als darstellende Matrix.

(ii) $V = C([a;b])$ und $f, g \in V$

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$$

Bilinearität und Symmetrie sind klar.

Positiv definit: Sei $f > 0$

$\Rightarrow$ Es gibt $x_0 \in [a;b]$ mit $f^2(x_0) > 0$

$\xRightarrow{f \text{ stetig}}$ Es gibt Umgebung $[c;d]$ von x_0 mit $f^2(x) \geq \frac{1}{2} f^2(x_0) > 0$

$$\Rightarrow \langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x)\, dx \geq \int_c^d f^2(x)\, dx \geq \int_c^d \frac{1}{2} f^2(x_0)\, dx > 0$$

$$\left(\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx\, , \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx} \right)$$

allgemeiner: für Gewichtsfunktion $h \in C([a;b])$ mit $h > 0$:

$$\langle f, g \rangle_h := \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)\, dx \text{ ist auch Skalarprodukt.}$$

10.8. Satz

Sei $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ euklidischer Vektorraum. Dann wird durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm auf V definiert. Es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Beweis:

(i) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0 \overset{\text{positiv}}{\underset{\text{definit}}{\Longleftrightarrow}} v = \mathcal{O}$

(ii) $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$
(Cauchy-Schwarz)
Sei ohne Einschränkung $w \neq \mathcal{O}$, $w_1 = \frac{w}{\|w\|}$ $(\overset{\text{(ii)}}{=} \|w_1\| = 1)$:

$$\begin{aligned}0 \le \|v - \langle v, w_1\rangle \cdot w_1\|^2 &= \langle v - \langle v, w_1\rangle \cdot w_1, v - \langle v, w_1\rangle \cdot w_1\rangle \\ &\langle v, v\rangle - 2 \cdot \langle v, w_1\rangle^2 + \langle v, w_1\rangle^2 \cdot \underbrace{\langle w_1, w_1\rangle}_{=1} \\ &= \|v\|^2 - \langle v, w_1\rangle\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|v\|^2 \ge \langle v, w_1\rangle^2 = \left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|}\right)^2 \Rightarrow \langle v, w\rangle^2 \le \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$
$$\Rightarrow |\langle v, w\rangle| \le \|v\| \cdot \|w\|$$

(iii) Δ-Ungleichung

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + 2 \cdot \langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \\ &\underset{\text{CS-Ungl.}}{\le} \|v\|^2 + 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2\end{aligned}$$

■

Sei nun V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

10.9. Definition

$$s: V \times V \to \mathbb{C}$$

heißt **Sesquilinearform**, wenn

$$\begin{aligned}s(v_1 + v_2, w) &= s(v_1, w) + s(v_2, w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda \cdot s(v, w) \\ s(v, w_1 + w_2) &= s(v, w_1) + s(v, w_2) \\ s(v, \lambda w) &= \bar{\lambda} \cdot s(v, w)\end{aligned}$$

$q(v) \coloneqq s(v, v)$ zugehörige quadratische Form mit

$$q(\lambda v) = s(\lambda v, \lambda v) = \lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot s(v, v) = |\lambda|^2 \cdot q(v)$$

In Koordinaten: mit $e_1, \dots, e_n$ Basis von V

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

Mit $a_{ij} = s(e_i, e_j)$, $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n} \in M_n(\mathbb{C})$

$$s(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \cdot a_{ij} \cdot \overline{y_j} = x^t \cdot A \cdot \bar{y} \text{ mit } \bar{y} \coloneqq \begin{pmatrix}\overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n}\end{pmatrix}$$

10.10. Definition

Eine Sesquilinearform s heißt **hermitesch** [ɛʁˈmiʧ], wenn

$$s(v,w) = \overline{s(v,w)}$$

Dies bedeutet für darstellende Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots n}$:

$$x^t \cdot A \cdot \bar{y} = \overline{y^t \cdot A \cdot \bar{x}} = y^t \cdot \bar{A} \cdot x = (\bar{y}^t \cdot \bar{A} \cdot x)^b = x^t \cdot \bar{A}^t \cdot \bar{y}$$

d.h. $A = \bar{A}$.

10.11. Definition

Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ heißt

$$A^* \coloneqq \bar{A}^t$$

die zu A **adjungierte Matrix**.

A heißt **hermitesch**, wenn $A = A^*$.

Also: Sesquilinearform $x^t \cdot A \cdot \bar{y}$ hermitesch $\Leftrightarrow$ A hermitesch

Man beachte: $s(v,w)$ hermitesch $\Rightarrow$ $q(v) = s(v,v)$ reell

$$q(v) = s(v,v) = \overline{s(v,v)} = \overline{q(v)} \Rightarrow q(v) \in \mathbb{R}$$

10.12. Definition

Sei V ein $\mathbb{C}$-VR.
Ein Skalarprodukt ist eine hermitesche Sesquilinearform

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V &\to \mathbb{C} \\ (v,w) &\mapsto \langle v,w\rangle \end{aligned}$$

die positiv definit ist, d.h.

$$\langle v,v\rangle > 0 \text{ für } v \neq \mathcal{O}$$

Das Tupel $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt dann ein **unitärer** Vektorraum.

10.13. Beispiele

(i) Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i} = x^t \cdot \bar{y} = x^t \cdot E_n \cdot \bar{y}$$

d.h. darstellende Matrix ist Einheitsmatrix.

(ii) Sei $V = C([a;b], \mathbb{C})$, d.h. Funktionen $f: [a;b] \to \mathbb{C}$, stetig

$$f = f_1 + i \cdot f_2 \qquad \left.\begin{matrix} f_1 \text{ Realteil} \\ f_2 \text{ Imaginärteil} \end{matrix}\right\} \text{stetig}$$

$$\int_a^b f\,dx := \int_a^b f_1 dx + i \cdot \int_a^b f_2 dx$$

⇒ Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$$

oder allgemeiner

$$\langle f, g \rangle_h := \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)} \cdot h(x) dx \quad h > 0$$

10.14. Satz

Sei $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ unitärer Raum. Dann wird durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

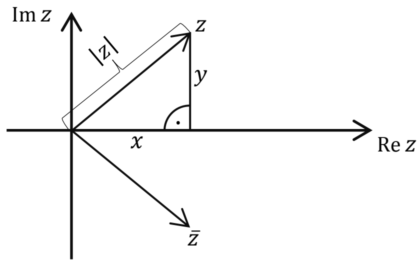
eine Norm auf V definiert.

10.15. Beispiele

(i) $V = \mathbb{C}\ (= \mathbb{C}^1)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Standard-Skalarprodukt: $\langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \cdot \overline{z_2}$

$$\Rightarrow \|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{|z|^2} = |z|$$



allgemeiner: $V = \mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad z_j = x_j + y_j \cdot i \quad \begin{matrix} x_j = \operatorname{Re} z_j \\ y_j = \operatorname{Im} z_j \end{matrix}$$

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^2 + y_j^2\right)}$$

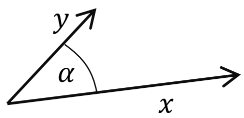
$$\Rightarrow (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|) \cong (\mathbb{R}^{2n}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Euklidische} \\ \text{Norm in } \mathbb{R}^{2n}}}{\|\cdot\|})$$

(ii) $V = C([a;b], \mathbb{C})$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x) \cdot \overline{f(x)}\, dx} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx} =: \|f\|_2$$

$\|\cdot\|_2$ heißt Norm der **quadratischen Konvergenz**.

11. Orthogonalität



Für Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\alpha$$

Insbesondere:

x und y stehen senkrecht (orthogonal) aufeinander $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$

11.1. Definition

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.

$x, y \in V$ heißen orthogonal, in Zeichen $x \perp y$, wenn

$$\langle x, y\rangle = 0$$

Ein System von Vektoren $(v_i)_{i\in I}$ in V heißt **Orthonormalsystem** (ONS), wenn

$$\langle v_i, v_j\rangle = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{Kronecker-Symbol}} := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

(d.h. Vektoren sind paarweise orthogonal und haben die Länge 1)

Ein ONS, das eine Basis von V ist, heißt **Orthonormalbasis** (ONB).

11.2. Beispiele

(i) Kanonische Basen in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt sind ONB'en.

(ii) $V = C([0;1], \mathbb{C})$ mit

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx$$

Dann ist $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $e_k(x) = e^{2\pi i k x} = \cos(2\pi k x) + i \cdot \sin(2\pi k x)$ ein ONS.

$$\begin{aligned} \langle e_j, e_k\rangle &= \int_0^1 e^{2\pi i j x} \cdot \underbrace{\overline{e^{2\pi i k x}}}_{=e^{-2\pi i k x}}\, dx \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i (j-k) x}\, dx \end{aligned}$$

$j = k$:

$$\langle e_j, e_j \rangle = \int_0^1 e^0 \, dx = 1$$

$j \neq k$:

$$\begin{aligned} \langle e_j, e_k \rangle &= \frac{1}{2\pi i(j-k)} \cdot e^{2\pi i(j-k)x} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2\pi i(j-k)} \cdot (\underbrace{e^{2\pi i(j-k)\cdot 1}}_{\substack{=e^0=1 \\ \text{da } (j-k)\in\mathbb{Z} \\ \text{siehe Einheits-} \\ \text{kreis}}} - \underbrace{e^0}_{=1}) = 0 \end{aligned}$$

11.3. Bemerkungen

(i) Ist $e_1, \dots, e_n$ ONS von V und

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot e_j \in V$$

ein Vektor.
Dann gilt

$$\langle x, e_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j , e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle}_{=\delta_{ij}} = \lambda_i \cdot \langle e_i, e_i \rangle = \lambda_i$$

$$\boxed{\lambda_j = \langle x, e_j \rangle}$$

(ii) Sei $e_1, \dots, e_n$ ONB von V

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ Skalarprodukt → Bilinearform

Darstellende Matrix $A = \left(a_{ij}\right)$ bzgl. ONB

$$a_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow A = E_n$$

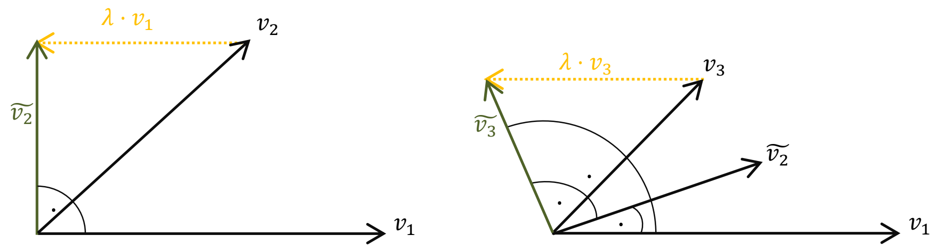
Konstruktion von ONB'en:

11.4. Gram-Schmidtsches Orthonormierungsverfahren

V euklidischer oder unitärer Vektorraum.
Seien $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängige Vektoren.
Dann gibt es $e_1, \dots, e_k \in V$, so dass:

$e_1, \dots, e_k$ ONS mit $\operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_j\} = \operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_j\}$ für $j = 1, \dots, k$

Idee: Ändere v_j um Linearkombination von $v_1, \dots, v_{j-1}$ so ab, dass dieser Vektor $\perp \operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_{j-1}\}$ ist.



Explizit:
Anfang:

Setze $e_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $(\Rightarrow \|e_1\| = 1)$

Rekursionsschritt:

Sind $e_1, \dots, e_{j-1}$ bestimmt, so setze

$$\widetilde{v_j} := v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, e_i \rangle e_i$$

und

$$e_j := \frac{\widetilde{v_j}}{\|\widetilde{v_j}\|}$$

denn für $k < j$ folgt:

$$\langle \widetilde{v_j}, e_k \rangle = \langle v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, e_i \rangle e_i \,, e_k \rangle$$

$$= \langle v_j, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{j-1} \langle v_j, e_i \rangle \underbrace{\langle e_i, e_k \rangle}_{=\delta_{ik}} = \langle v_j, e_k \rangle - \langle v_j, e_k \rangle \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \langle e_i, e_k \rangle = 0$$

11.5. Beispiele

(i) $V = \mathbb{R}^3 \;\; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|v_1\| = \sqrt{2} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_2, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 + 0 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\widetilde{v_2} = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|\widetilde{v_2}\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_3, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\; \langle v_3, e_2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\widetilde{v_3} = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle \cdot e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\widetilde{v_3}\| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $V = \{ f: [-1;1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ Polynomfunktion} \}$
mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f \cdot g \, dx$$

Dann ist mit $f_n(x) = x^n \; n \in \mathbb{N}_0 \; \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ Basis von V.

$$\langle f_0, f_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, dx = \int_{-1}^{1} x \, dx = 0 \Rightarrow f_0 \perp f_1$$
$$\langle f_0, f_2 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 \, dx = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \neq 0$$

$\Rightarrow f_0, f_2$ nicht orthogonal
Also $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ keine ONB.

Gram-Schmidt-Verfahren auf Folge $f_0, f_1, \ldots$ anwenden liefert ONB $e_0, e_1, \ldots$, wobei

$$e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(x)$$

mit P_n **Legendre-Polynom** [ləˈʒɑ̃ːdrə] vom Grad n:

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

z.B. $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

Entwicklung Legendre-Polynome

f Polynom ($f = \sum\langle f, e_n\rangle e_n$)

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot P_n$$

mit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2} \cdot \langle f, P_n\rangle \\ &= \frac{2n+1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} f(x) \cdot P_n(x)\,dx \end{aligned}$$

11.6. Korollar

Jeder euklidischer/unitärer Vektorraum besitzt eine ONB.

Sei $A = M_n(\mathbb{R})$ eine positiv definite Matrix. Dann ist

$$\langle x, y\rangle_A := x^t \cdot A \cdot y \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Skalarprodukt.

Gram-Schmidt: Es gibt Basiswechsel, beschrieben durch Basiswechselmatrix $S \in GL_n(\mathbb{R})$, so dass die neue Basis ONB bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ ist.

D.h. $\langle x, y\rangle_A$ ist in neuen Koordinaten $\tilde{x} = Sx, \tilde{y} = Sy$ beschrieben durch $\tilde{x}^t \cdot E \cdot \tilde{y}$.
Nach Konstruktion ist S sogar obere Dreiecksmatrix.

Also $x^t \cdot A \cdot y = \langle x, y\rangle_A = \tilde{x}^t \cdot \tilde{y} = (Sx)^t \cdot Sy = x^t \cdot S^t \cdot S \cdot y$

Daher gilt:

11.7. Korollar

Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$ positiv definit, so gibt es eine obere Dreiecksmatrix $S \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $A = S^t \cdot S$.

11.8. **Anwendung** auf lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} & A \cdot x = b \\ \Leftrightarrow\ & S^t \cdot Sx = b \\ \Leftrightarrow\ & Sx = c \text{ für } S^t c = b \end{aligned}$$

Leicht lösbar, da S und S^t Dreiecksmatrizen sind.
→ **Choleski-Verfahren**

Orthogonale Abbildungen

Betrachte Drehungen in $V = \mathbb{R}^n$ um Ursprung 0.

→ Lineare Abbildung f mit der Eigenschaft, dass Längen und Winkel erhalten bleiben, also

$$(*)\ \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \text{ für alle } v, w \in V$$

11.9. Definition

Ist f ein Endomorphismus in einem euklidischen Vektorraum mit $(*)$, so heißt f **orthogonal**.

Ist f ein Endomorphismus in einem unitären (= komplexen) Vektorraum mit $(*)$, so heißt f **unitär**.

11.10. Eigenschaften

Sei $\dim V < \infty$ und f orthogonal bzw. unitär.

(i) $f(v) = 0 \Leftrightarrow \|f(v)\| = 0 \Leftrightarrow \langle f(v), f(v)\rangle = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

d.h. f ist injektiv $\xRightarrow{\dim V < \infty}$ f auch surjektiv

⇒ unitäre Abbildungen sind bijektiv.

(ii) Für die Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von f gilt: $|\lambda| = 1$
denn wenn $f(v) = \lambda v$, $v \neq \mathcal{O}$

$$\langle v, v\rangle \overset{(*)}{=} \langle f(v), f(v)\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot \langle v, v\rangle = |\lambda|^2 \cdot \langle v, v\rangle$$

$$\Rightarrow |\lambda| = 1$$

(iii) Darstellende Matrix A bzgl. ONB von V

$v_1, \dots, v_n$ ONB von $V \overset{(*)}{\Rightarrow} f(v_1), \dots, f(v_n)$ auch ONB von V.

$\Rightarrow$ Spalten von $A = \left(a_{ij}\right)$ sind ONB von $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$), d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot \overline{a_{kj}} = \delta_{ij} \overset{\text{konjugieren}}{\Longleftrightarrow} \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}} \cdot a_{kj} = \delta_{ij}$$

oder $\overline{A^t} \cdot A = E = A^* \cdot A = E$

11.11. Definition

Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heißt **orthogonal**, wenn

$$A^t \cdot A = E \text{ (d.h. } A^t = A^{-1}\text{)}$$

Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ heißt **unitär**, wenn

$$A^* \cdot A = E \text{ (d.h. } A^* = A^{-1}\text{)}$$

11.12. Satz

Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ (bzw. $M_n(\mathbb{C})$) sind äquivalent

(i) A orthogonal (bzw. unitär)
(ii) $A^t \cdot A = E$ $\quad$ $(A^* \cdot A = E)$
(iii) $A \cdot A^t = E$ $\quad$ $(A \cdot A^* = E)$
(iv) $A \in GL_n(\mathbb{R})$ und $A^{-1} = A^t$ (bzw. $A \in GL_n(\mathbb{C})$ und $A^{-1} = A^*$)
(v) Spalten von A bilden ONB
(vi) Zeilen von A bilden ONB

Beweis:
(i)$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$(ii)
(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv) wegen $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$
(ii)$\Leftrightarrow$(iv) Siehe oben
(iii)$\Leftrightarrow$(vi) gleiches Argument auf Zeilen, d.h. A^t anwenden

Ist A unitär (insbesondere wenn A orthogonal ist)

$\Rightarrow \det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ Produkt der Eigenwerte und $|\lambda_i| = 1$

Es folgt:

11.13. Satz

Ist A unitär, so folgt $|\det A| = 1$.

Ist A orthogonal, so folgt $\det A = \pm 1$.

Nun sind Produkte von orthogonalen/unitären Matrizen wieder orthogonal/unitär:

$$A_1^{-1} = A_1^* \quad A_2^{-1} = A_2^*$$

$$(A_1 \cdot A_2)^{-1} = A_2^{-1} \cdot A_1^2 = \overline{A_2^t} \cdot \overline{A_1^t} = (\overline{A_1} \cdot \overline{A_2})^t = (\overline{A_1 \cdot A_2})^t = (A_1 \cdot A_2)^*$$

Somit bilden die orthogonalen bzw. unitären Matrizen Untergruppen der invertierbaren Matrizen.

Man setzt:

11.14. Definition

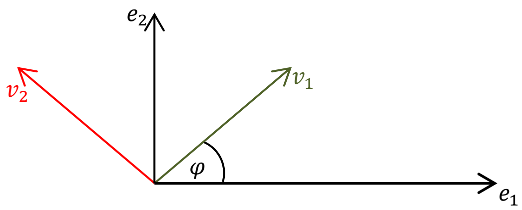
$U(n) := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ unitär}\}$	**unitäre Gruppe**
$O(n) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ orthogonal}\}$	**orthogonale Gruppe**
$SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = +1\}$	**spezielle orthogonale Gruppe**

11.15. Beispiel $O(2)$

Sei $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in O(2)$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ bilden ONB von $\mathbb{R}^2$

1. Fall:

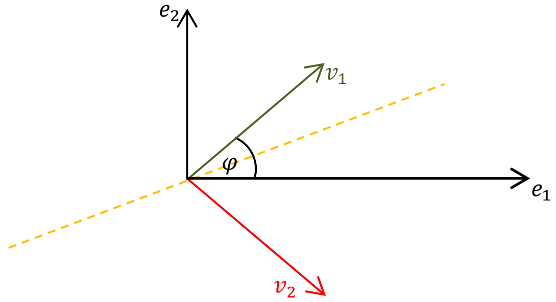


$$v_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Drehung um Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \Rightarrow A \in SO(2)$$

2. Fall:



$$v_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$
$$v_2 = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

→ Spiegelung (an Achse, die mit e_1 den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ einschließt)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = -1 \Rightarrow A \in O(2) \setminus SO(2)$$

Diese Unterteilung gilt allgemein im $\mathbb{R}^n$.

$A \in SO(n)$ beschreibt Drehung im $\mathbb{R}^n$ (um Ursprung)
$A \in O(n) \setminus SO(n)$ beschreibt Dreh-Spiegelung, d.h. Drehung + Spiegelung (an Hyperebene durch Ursprung)

z.B. Hintereinanderschalten von zwei Spiegelungen A und B (an verschiedenen Hyperebenen) liefert Drehung, denn

$$\det(B \cdot A) = \det B \cdot \det A = (-1)(-1) = +1$$

11.16. Beispiel

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = (\underbrace{v_1, v_2, v_3}_{\text{Spaltenvekt.}})$$

Nachrechnen zeigt: $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$
Somit $A \in SO(3)$

Charakteristisches Polynom:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1-2\lambda & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2\lambda & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$$

$\Rightarrow \det A = P_A(0) = 1 \ \Rightarrow A \in SO(3)$ Drehung

Eigenwerte: $P_A(1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$
$(-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1) \div (\lambda - 1) = -\lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \pm i$

⇒ reeller Eigenwert: $\lambda_1 = 1$

Zugehörige Eigenvektoren bilden Drehachse:

$A \cdot x = 1 \cdot x \rightarrow$ invariant unter Drehung

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ bestimmen

$$(A - 1E) \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot x = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = \mu$ freier Parameter

$\Rightarrow x_2 = 0, x_1 = \mu$

$\Rightarrow x = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

⇒ Richtung der Drehachse $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Drehwinkel α:

Wähle Vektor in Ebene ⊥ zu Drehachse, z.B. $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha$ ist Winkel zwischen y und $A \cdot y$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\langle y, A \cdot y \rangle}{\|y\| \cdot \|A \cdot y\|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle}{1 \cdot 1} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Es gilt auch:

$$\operatorname{Spur} A = 2 \cdot \cos(\alpha) + 1$$

11.17. Bemerkung

Ist $A \in O(n) \Rightarrow$ für Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$

Falls n *ungerade*: Das charakteristische Polynom hat mindestens eine reelle Nullstelle.

⇒ mindestens ein Eigenwert $+1$ oder -1.

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A.

Wenn $\lambda_k \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_k = \pm 1$
Wenn $\lambda_k \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda_k = e^{i\varphi_k}$ und $\bar{\lambda} = e^{-i\varphi_k}$ auch Eigenwert.

Da $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ und $\lambda_k \cdot \overline{\lambda_k} = |\lambda_k|^2 = 1$

$\Rightarrow$ Produkt der $\underbrace{\text{reellen Eigenwerte}}_{\substack{\in\{+1;-1\},\text{ auch}\\ \text{ungerade viele}}} = \det A$

Daher: Wenn $A \in SO(n) \Rightarrow \det A = +1 \Rightarrow$ mindestens ein Eigenwert $= +1$

$\Rightarrow$ In ungeraden Raumdimensionen besitzt eine Drehung eine invariante (Dreh-) Achse.

11.18. Normalform für orthogonale Abbildungen

Man kann zeigen: Zu jeder orthogonalen Abbildung gibt es eine ONB vom $\mathbb{R}^n$, so dass die darstellende Matrix die folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}} & & & & 0\\ & \boxed{\begin{matrix}-1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{A_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{A_k}\end{pmatrix}$$

Wobei $A_j \in SO(2)$

$\boxed{\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}}$ beschreibt invarianten Teilraum

A_j beschreibt Drehungen in 2-dimensionalen Unterräumen

$\boxed{\begin{matrix}-1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{matrix}}$ jedes Paar von Eigenwerten -1 beschreibt 180°-Drehung

Eventuell übriger EW -1 liefert Spiegelung

Somit: $A \in SO(n) \Leftrightarrow$ Anzahl der Eigenwerte -1 gerade.

11.19. Bemerkung

Somit für $A \in SO(3)$ Drehmatrix.

Normalform $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = P_{\tilde{A}}(\lambda) &= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \cdot [(\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi] = (1-\lambda) \cdot [(\cos^2\varphi - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2 + \sin^2\varphi] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1) \end{aligned}$$

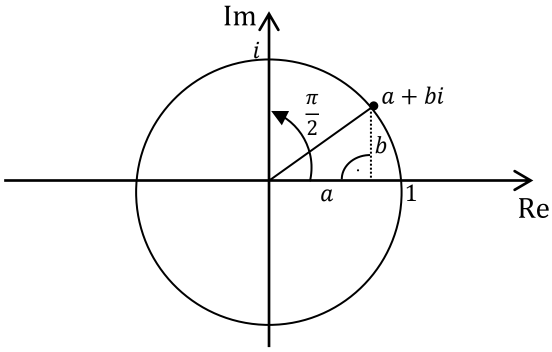
$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \rightarrow$ Drehachse

$$\lambda_{2,3} = \frac{2 \cdot \cos\varphi \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \cos^2\varphi}}{2} = \cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi = e^{\pm i\varphi}$$

Liefert Möglichkeit, Drehwinkel zu bestimmen.

In Beispiel 11.18 hatten wir gefunden:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i = e^{\pm i \cdot \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{Drehwinkel } \frac{\pi}{2}$$



Allgemein, wenn $\lambda_{2,3} = a \pm i \cdot b \Rightarrow \tan\varphi = \frac{b}{a}$.

Orthogonale Zerlegungen

11.20. Definition

Sei V euklidischer/unitärer Vektorraum und $U \subset V$ Untervektorraum.

Dann heißt

$$U^\perp := \{v \in V | \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

der zu U **orthogonale Unterraum**.

11.21. Bemerkungen

$U^\perp$ ist offensichtlich Unterraum.
Es ist $U \cap U^\perp = \{\mathcal{O}\}$ und $U \oplus U^\perp = V$ **orthogonale Zerlegung**.

Insbesondere gilt $(U^\perp)^\perp = U$

Jeder Vektor $v \in V$ besitzt daher eindeutige Zerlegung:

$$v = u + u_\perp \text{ mit } u \in U \text{ und } u_\perp \in U^\perp$$

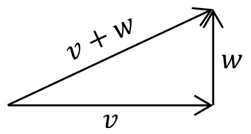
11.22. Definition

Die Abbildung

$$\begin{aligned} P_U: V &\to U \subset V \\ v = u + u_\perp &\mapsto u \end{aligned}$$

heißt **orthogonale Projektion**.

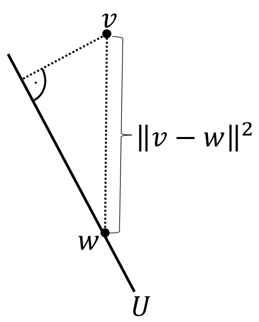
11.23. Bemerkungen



(i) Ist $v \perp w$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle &= \langle v,v\rangle + \underbrace{\langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle}_{=2\cdot\mathrm{Re}\langle v,w\rangle} + \langle w,w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\cdot\underbrace{\mathrm{Re}\langle v,w\rangle}_{=0} + \|w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \end{aligned}$$

(Satz von Pythagoras)



D.h. für $v = u + u_\perp$ und $w \in U$

$$\begin{aligned} w \mapsto \|v-w\|^2 &= \|\underbrace{v-w}_{\in U} + \underbrace{u_\perp}_{\in U^\perp}\|^2 \ (\Rightarrow (v-w) \perp u_\perp) \\ &= \|v-w\|^2 + \|u_\perp\|^2 \end{aligned}$$

Wird minimal, wenn $w = u = P_U v$

$\Rightarrow P_U v$ Punkt auf U mit minimalem Abstand zu v.

(ii) Bestimmung der Orthogonalprojektion:

Ist $e_1, \dots, e_n$ ONB und $U = \mathrm{lin}\{e_1, \dots, e_k\}$

$\Rightarrow U^\perp = \mathrm{lin}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$

Dann gilt für $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i \rangle e_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i}_{\in U^\perp}$$

d.h.

$$P_U v = \sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i \rangle e_i$$

Daher: Ist $U = \mathrm{lin}\{v_1, \ldots, v_k\}$: Ohne Einschränkung $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig.

Bestimme mit Gram-Schmidt ONB $e_1, \ldots, e_k$ von U

$$\Rightarrow P_U v = \sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i \rangle e_i$$

(iii) Orthogonale Projektionen auch in ∞-dimensionalen Räumen wichtig als beste Approximation, z.B. $V = C([0;1], \mathbb{C})$:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot \bar{g} \, dx$$

ONS: $e_k(x) = e^{2\pi i k x} \quad k \in \mathbb{Z}$

Sei $V_n = \mathrm{lin}\{e_k \mid |k| \leq n\}$.

Beste Approximation von $f_n \in V_n$:

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{2\pi i k x}$$

mit

$$c_k := \langle f, e_k \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi i k x} \, dx$$

Speziell, wenn f reellwertig

$$\sum_{k=0}^{n} [a_k \cdot \cos(2\pi k x) + b_k \cdot \sin(2\pi k x)]$$

mit

$$a_k = \frac{c_k + c_{-k}}{2} \quad b_k = \frac{c_k - c_{-k}}{2i}$$

Es gilt mit

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\, dx}$$

$$\|f - f_n\|_2 = \min_{g \in V_n} \|f - g\|_2$$

und sogar

$$\|f - f_n\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \ f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ in } \|\cdot\|_2\text{-Norm}$$

12. Selbstadjungierte Abbildungen

12.1. Definition

Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer/unitärer Vektorraum.
Ein Endomorphismus

$$f: V \to V$$

heißt **selbstadjungiert**, wenn

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \quad v, w \in V$$

12.2. Bemerkung (Matrixdarstellung bzgl. ONB)

Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ bzw. $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dann gilt stets

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^t \cdot \bar{y} = x^t \cdot A^t \bar{x} = x^t \cdot \overline{\bar{A}^t y} = x^t \cdot \overline{A^* y} = \langle x, A^* y\rangle$$

$$\boxed{\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle}$$

Ist daher A darstellende Matrix von selbstadjungiertem Endomorphismus, so gilt

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

das heißt:

$$A = A^*$$

also ist A hermitesch bzw. symmetrisch.

12.3. Satz

Ein Endomorphismus ist genau dann selbstadjungiert, wenn die darstellende Matrix bzgl. ONB hermitesch im Komplexen oder symmetrisch im Reellen ist.

12.4. Bemerkung

Sei f selbstadjungiert und $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch bzw. $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitesch.
Dann sind alle Eigenwerte reell und für das charakteristische Polynom gilt:

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda) \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

denn sei λ Eigenwert und $v \neq \mathcal{O}$ Eigenvektor zu λ:

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

12.5. Satz

Sei f selbstadjungiert. Dann besitzt f eine ONB aus Eigenvektoren (Basis aus Eigenvektoren $\Leftrightarrow$ diagonalisierbar).

12.6. Satz

Es gibt also eine ONB, bezüglich der f durch Diagonalmatrix dargestellt wird.
f heißt daher **orthogonal diagonalisierbar**.

12.7. Korollar

Symmetrische bzw. hermitesche Matrizen sind (orthogonal) diagonalisierbar.

Beweis von 12.5:

Induktion nach Dimension n von V.

$n = 1$: nichts zu zeigen.

„$n - 1 \to n$“: Sei v_1 Eigenvektor von f zu Eigenwert $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

$$W := \operatorname{lin}\{v_1\} \Rightarrow V = W \oplus W^\perp$$

$\Rightarrow$ für $w \in W^\perp$

$$\langle f(w), v_1\rangle = \langle w, f(v_1)\rangle = \langle w, \lambda_1 v_1\rangle = \bar{\lambda}\underbrace{\langle w, v_1\rangle}_{=0}$$

$\Rightarrow f(w) \in W^\perp$
$\Rightarrow f: W^\perp \to W^\perp$ invarianter Teilraum und $f|_{W^\perp}$ selbstadjungiert

$f|_{W^\perp}: f$ eingeschränkt auf

⇒ Nach Induktions-Annahme existiert ONB $w_1, \dots, w_{n-1}$ von $W^\perp$ aus Eigenvektoren von $f \Rightarrow v_w, w_1, \dots, w_{n-1}$ ist gesuchte ONB von V ■

12.8. Korollar

Sei s symmetrische Bilinearform (hermitesche Sesquilinearform) auf n-dimensionalem Vektorraum V mit darstellender Matrix A bzgl. Basis $\mathcal{A}$.

Dann gibt es eine andere Basis $\mathcal{B}$ von V mit

(i) Darstellende Matrix von s bzgl. $\mathcal{B}$ ist diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(ii) Der Basiswechsel von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$ ist orthogonal/unitär.

(iii) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die Eigenwerte von A.

Beweis:

A symmetrisch/hermitesch ⇒ orthogonal diagonalisierbar.

D.h. es gibt $S \in O(n)$ (bzw. $U(n)$) mit

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i \text{ Eigenwerte von } A$$

Beachte nun nur: Neue Matrix von s nach Basiswechsel → neue Koordinaten:

$$\tilde{x} := Sx, \;\; \tilde{y} := Sy$$

$$x^t \cdot Sy = (S^{-1}\tilde{x})^t \cdot A \cdot (S^{-1}\tilde{y}) = \tilde{x}^t \cdot (S^{-1})^t \cdot A \cdot S^{-1} \cdot \tilde{y}$$

d.h. neue darstellende Matrix:

$$(S^{-1})^t \cdot A \cdot S^{-1}$$

Da aber $S \in O(n) \Rightarrow S^{-1} = S^t \Rightarrow (S^{-1})^t = S$

$$\Rightarrow (S^{-1})^t \cdot A \cdot S^{-1} = S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$x^t \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i^2$$

12.9. Korollar

Eine symmetrische Matrix ist genau dann

- positiv definit, wenn alle Eigenwerte $\lambda_i > 0$
- negativ definit, wenn alle Eigenwerte $\lambda_i < 0$
- positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$
- negativ semidefinit, wenn alle Eigenwerte $\lambda_i \leq 0$
- indefinit, wenn es Eigenwerte λ_i und λ_j gibt mit $\lambda_i < 0 < \lambda_j$

12.10. Bemerkung

Bei beliebigen (nicht orthogonalen) Basiswechseln bleiben die Eigenwerte nicht invariant, es gilt aber:

Sylvestersches Trägheitsgesetz

Sei s symmetrische Bilinearform. Dann ist die Anzahl der positiven Eigenwerte, der negativen Eigenwerte und der Eigenwerte $= 0$ der darstellenden Matrix unabhängig von der Wahl der Basis.

→ Normalform für symmetrische Bilinearformen:

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$