Auffrischungskurs zu
“Mathematik für Naturwissenschaften II”

Skript SoSem 2013

PD Dr Dirk Frettlöh
Technische Fakultät
Universität Bielefeld

September 2, 2013

Contents

Vorab:

Dieses Skript entstand im Rahmen des Auffrischungskurses zur Vorlesung “Mathematik für Naturwissenschaften II” nach dem Sommersemester 2013 an der Uni Bielefeld. Diese Veranstaltung diente dazu, die Studierenden auf die Nachklausur vorzubereiten. Dieser Kurs ist eine Maßnahme im Rahmen des Programms “Richtig Einsteigen” der Universität Bielefeld.

An den Leser:

Dieser Kurs (“Auffrischungskurs Mathematik für Naturwissenschaften II”[1]) ist ein Zusatzangebot zur Vorlesung “Mathematik für Naturwissenschaften II”[2]). Der Kurs dient dazu, Sie auf die Nachklausur vorzubereiten. Die Teilnahme ist freiwillig.

Es wird Wert gelegt auf das Einüben der Rechentechniken. Das Beherrschen dieser Techniken dient auch dem tieferen Verständnis des Themas, denn Mathematik betreiben hat mehr mit Können zu tun als mit Wissen. Daher ist dies ausdücklich keine Ersatzvorlesung. Im Kurs wurden immer wieder Gelegenheiten gegeben, konkrete Aufgaben selber zu rechnen.

Das Ziel ist, dass Sie die Nachklausur bestehen. Dazu können Sie selbst am meisten beitragen. Es reicht nicht die Teilnahme am Kurs allein, es ist unumgänglich, selbständig weiter zu üben. Das kann mittels der Aufgaben aus diesem Skript geschehen, mit den Aufgaben aus der ersten Klausur, mittels der Aufgabensammlung von Kai-Uwe Bux und Martin Fluch sowie mit den Büchern von Lothar Papula (siehe Literaturliste, online über die Unibib erhältlich) und weiteren Übungsbüchern.

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

[1] http://ekvv.uni-bielefeld.de/kvv_publ/publ/vd?id=39663308
[2] http://ekvv.uni-bielefeld.de/kvv_publ/publ/vd?id=37051003

Part I

Lineare Algebra

1 Intro

Man muss eigentlich nur drei Begriffe wirklich verstanden haben, um fast den kompletten Lineare-Algebra-Teil der Vorlesung zu verstehen. Das sind:

- ähnlich
- Eigenvektor
- orthogonal

Um diese Begriffe zu verstehen, muss man allerdings weitere Begriffe verstanden haben. Das sind:

Vektor, linear unabhängig (lin.u.), Matrix, Determinante, Rang, (Spur,) charakteristisches Polynom, Eigenwert, Vielfachheit eines Eigenwerts, Diagonalmatrix, Jordansche Normalform, orthogonale Vektoren, orthogonale Matrix, unitäre Matrix.

Diese Begriffe wollen wir im Folgenden so knapp wie möglich und so präzise wie nötig erläutern.

1.1 Vektoren

Ein **Vektor** ist einfach eine Tabelle mit einer Spalte, deren Einträge Zahlen sind. Zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -0,1 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \cdots$$

Als Werte für die Zahlen lassen wir hier alle reellen Zahlen zu. Die Menge aller Vektoren mit n Zeilen bezeichnen wir als $\mathbb{R}^n$. (Eine **Zeile** ist immer horizontal, eine **Spalte** immer vertikal.) Interessant wird es, weil man: erstens mit Vektoren Ortskoordinaten beschreiben kann. Ein Vektor in $\mathbb{R}^2$ kann die Position eines Punkts in der Ebene beschreiben. Ein Vektor im $\mathbb{R}^3$ kann die Position eines Punkts im Raum beschreiben. Zweitens kann man mit Vektoren rechnen: man kann sie addieren, subtrahieren und mit einer reellen Zahl multiplizieren. Letzteres heißt **Skalarmultiplikation**. Eine echte Multiplikation (Vektor mal Vektor) gibt es nicht, auf jeden Fall nicht so, dass in natürlicher Weise wieder ein Vektor rauskommt. Addieren, subtrahieren und sklar-multiplizieren geht z.B. so:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bei Addition und Subtraktion von Vektoren müssen beide Vektoren natürlich die selbe Länge haben. Schreibt man allgemein einen Vektor x aus $\mathbb{R}^n$ so: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$, dann geht Addition, Subtraktion und Skalarmultiplikation so:

$$x+y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \quad x-y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ \vdots \\ x_n-y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

1.2 Matrizen

Eine **Matrix** ist einfach eine Tabelle mit n Zeilen und m Spalten, deren Einträge reelee Zahlen sind. Zum Beispiel sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 12 & 23 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & \pi & -0,1 \\ 7 & 1000 & -33 \\ 6 & 8 & -10 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizen. Auch Matrizen lassen sich addieren und subtrahieren, wenn sie das selbe Format haben. Zum Beispiel[3]

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -3+3 & 2+5 \\ 1+2 & 2+1 & 7+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die Menge aller Matrizen mit n Zeilen und m Spalten, deren Einträge reelle Zahlen sind, bezeichnet man als $\mathbb{R}^{n \times m}$. Matrizen werden wir hier oft mit Großbuchstaben $A, B, \ldots$ benennen. Die Einträge der Matrix A in Zeile i und Spalte j bezeichnen wir mit $a_{i,j}$. So ist zum Beispiel in der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 12 & 23 \end{pmatrix}$ etwa $a_{1,1} = 1$, $a_{1,3} = 3$ und $a_{2,2} = 12$. Wenn die Zahl der Spalten und Zeilen (wie hier) klein ist, dann lassen wir das Komma zwischen i und j weg. Also a_{12} statt $a_{1,2}$. Manchmal ist es praktisch, statt der Bezeichnung A für eine Matrix diese so zu schreiben: $(a_{ij})_{i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m}$, oder kurz $(a_i j)$. Damit läßt sich etwa die Regel zur Addition von Matrizen sehr kompakt hinschreiben:

$$A+B := (a_{ij}+b_{ij})_{i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m}$$

Die Regel zur Skalarmultiplikation lautet in dieser kompakten Schreibweise einfach $\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ij})_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}$. Zum Beispiel:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-3) & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 5 & 10 & 35 \end{pmatrix}.$$

Im Gegensatz zu Vektoren kann man Matrizen auch miteinander multiplizieren, also “Matrix mal Matrix”, nicht nur “Zahl mal Matrix”. Zumindest, wenn ihr Format passt. Genauer:

[3] Dieses und viele weitere Rechenbeispiele in diesem Abschnitt sind aus wikipedia übernommen (Stand Dez 2012): `de.wikipedia.org/wiki/Vektor`, `de.wikipedia.org/wiki/Matrix_(Mathematik)` `de.wikipedia.org/wiki/Falksches_Schema`

Zwei Matrizen können multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der linken mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt.

Ist also A aus $\mathbb{R}^{\ell\times m}$ und B aus $\mathbb{R}^{m\times n}$, so kann man "A mal B" rechnen. Nennen wir das Ergebnis C, also $C = A\cdot B$, so ist

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}.$$

Ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 6+2\cdot 3+3\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot(-3) \\ 4\cdot 6+5\cdot 3+6\cdot 0 & 4\cdot(-1)+5\cdot 2+6\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 39 & -12 \end{pmatrix}$$

Zum Ausrechnen mit der Hand ist das Falk-Schema nützlich: Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es soll das Produkt $C = A\cdot B$ ermittelt werden. C ist eine 3×2-Matrix. Zunächst wird das Falk-Schema aufgestellt, indem die Matrizen höhenversetzt nebeneinander geschrieben werden (in der ursprünglichen Ausrichtung, also ohne Kippen oder Drehen). Hier also:

			(Spalte 1)	(Spalte 2)
			-1	1
			1	-2
(Zeile 1)	1	4		
(Zeile 2)	2	5		
(Zeile 3)	3	-6		

Die erste Zeile von A wird elementweise mit der ersten Spalte von B multipliziert: $1\cdot(-1)+4\cdot 1 = 3$, ergibt also $c_{11} = 3$. Analog ist $c_{12} = 1\cdot 1 + 4\cdot(-2) = -7$. Insgesamt ergibt sich

			(Spalte 1)	(Spalte 2)
			-1	1
			1	-2
(Zeile 1)	1	4	3	-7
(Zeile 2)	2	5	3	-8
(Zeile 3)	3	-6	-9	15

Also $C = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 3 & -8 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.1. Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Ausdrücke $A \cdot b$, $A \cdot A \cdot b$ (also $A^2 \cdot b$), $A \cdot A \cdot A \cdot b$ (also $A^3 \cdot b$), und $A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot Ab$ (also $A^4 \cdot b$).

Aufgabe 1.2. Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ die Ausdrücke AB, BA, AC, CA, BC, CB, A^TC, C^TA, ABC und CBA, falls es möglich ist.

Später (spätestens bei orthogonalen Matrizen) brauchen wir einen weiteren Begriff: Die **Transponierte** einer $n \times m$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist die $n \times m$-Matrix $A^T = (a_{ji})$. Das heißt: Zu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

die Transponierte. Man schreibt also die erste Zeile als erste Spalte, die zweite Zeile als zweite Spalte usw. Das ist ein sehr einfaches Konzept. Am besten sieht man es vielleicht an einem Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix heißt **symmetrisch**, falls $A^T = A$ ist. Dazu muss A eine **quadratische** Matrix sein, also eine $n \times n$-Matrix. Z.B. sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

symmetrische Matrizen.

Eine Matrix heißt **orthogonal**, falls $A^TA = E$ ist. Orthogonal sein heißt, dass die Spalten der Matrix eine ON-Basis sind, siehe Kapitel 6.2. Die Eigenwerte einer orthogonalen Matrix haben alle den (komplexen) Betrag 1.

Der entsprechende Begriff für Matrizen über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist unitär: Eine Matrix heißt **unitär**, falls $\bar{A}^TA = E$. (Dabei heißt $\bar{A}$, dass elle Einträge von A komplex konjugiert werden, vgl. Abschnitt 3.1.2.

2 Determinanten und Rang von Matrizen

> Ab jetzt betrachten wir nur noch quadratische Matrizen, also nur noch Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Einige Typen von Matrizen spielen eine wichtige Rolle. Eine ist die **Einheitsmatrix**:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Die besondere Eigenschaft von E in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist, dass für jede Matrix A in $\mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $A\cdot E = A$, und auch $E\cdot A = A$. (Probieren Sie es an Beispielen aus!)

Die Einheitsmatrix ist der Spezialfall einer Diagonalmatrix. Eine **Diagonalmatrix** ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale Null sind. Also haben Diagonalmatrizen die Form

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Kurz kann man eine Diagonalmatrix auch so schreiben: $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Eine **(obere) Dreiecksmatrix** ist eine Matrix, be der alle Einträge unter der Hauptdiagonalen 0 sind. Z.B. sind

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 0 & 22 & 23 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrizen. Ist nur von einer "Dreiecksmatrix" die Rede, ist fast immer (in diesem Skript: immer!) eine obere Dreiecksmatrix gemeint.

Oft (aber nicht immer) gibt es zu einer Matrix A eine **inverse** Matrix A^{-1}. Das ist die (eindeutige) Matrix mit $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$. ($E$ ist die Einheitsmatrix.)

Ob eine gegebene Matrix A eine Inverse besitzt, kann man auf viele Weisen berechnen. Ein Weg ist, zu prüfen ob die Determinante einer Matrix ungleich Null ist.

2.1 2×2- und 3×3-Determinanten

Besonders einfach lassen sich 2×2- und 3×3-Determinanten berechnen. Achtung: für Determinanten größerer Matrizen braucht man andere Methoden!

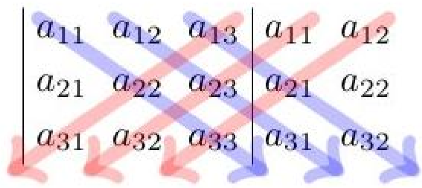
Die Determinante einer 2×2-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist einfach $ad - bc$. Man schreibt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc, \quad \text{z.B.} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 17 \end{pmatrix} = 1\cdot 17 - \frac{1}{2}\cdot 6 = 17 - 3 = 14.$$

Die Determinante einer 3×3-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right)$ ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Dazu gibt es ein Merkschema, die Regel von Sarrus. Man schreibt die Matrix hin und rechts daneben nochmal die ersten beiden Spalten.



Damit kann man zum Beispiel $\det \left(\begin{smallmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ so berechnen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{matrix} \quad : \quad 4\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 4 - 3\cdot 0\cdot 1 - 4\cdot 2\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot 5 = 0 + 30 + 4 - 0 - 32 - 5 = -3.$$

2.2 Determinanten von $n \times n$-Matrizen

Die Determinante einer $n \times n$-Matrix lässt sich durch “Entwickeln nach einer Zeile oder Spalte” berechnen. Die beiden Formeln lauten

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \quad \text{(Entwicklung nach der j-ten Spalte)}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \quad \text{(Entwicklung nach der i-ten Zeile).}$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrix von A ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Das braucht uns hier nicht weiter zu beschäftigen. Wir lernen gleich eine viel effizientere Methode kennen.

Rechenregeln für Determinanten

1. $\det(A) = \det(A^T)$
2. Ist B die Matrix, die aus A durch Vertauschen zweier Zeilen von A (bzw zweier Spalten) entsteht, so ist $\det(B) = -\det(A)$.
3. Ist B die Matrix, die aus A durch Multiplizieren aller Elemente einer Zeile (bzw Spalte) von A (bzw zweier Spalten) mit einer Zahl λ entsteht, so ist $\det(B) = \lambda \det(A)$.
4. Es ist $\det(A) = 0$, falls einer der folgenden Punkte zutrifft:
   - Alle Elemente in einer Zeile (bzw Spalte) sind Null.
   - Zwei Zeilen (bzw Spalten) sind gleich.
   - Zwei Zeilen (bzw Spalten) sind Vielfache voneinander.
   - Eine Zeile (bzw Spalte) lässt sich als Summe/Differenz von anderen Zeilen (bzw Spalten) schreiben.
5. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
6. Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen: $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.
7. Der Wert einer Deternminante bleibt gleich, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile addiert.

Mit diesen Regeln kann man Determinanten von Matrizen mit vier und mehr Zeilen recht einfach berechnen.

Beispiel 2.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wir berechnen $\det(A)$.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Regel 2)}$$

Und jetzt wenden wir wiederholt die Regel 7 an:

$$
\begin{array}{rrrrl}
\hline
\multicolumn{1}{|r}{1} & 1 & 3 & \multicolumn{1}{r|}{1} & \cdot(-3)\ \cdot(-2)\ \cdot(-2) \\
\hline
3 & 2 & 1 & 1 & \leftarrow + \\
2 & 1 & -1 & 4 & \leftarrow + \\
2 & 3 & 1 & 0 & \leftarrow + \\
\hline
\multicolumn{1}{|r}{0} & -1 & -8 & \multicolumn{1}{r|}{-2} & \cdot(-1) \\
\hline
0 & -1 & -7 & 2 & \leftarrow + \\
0 & 1 & -5 & -2 & \leftarrow + \\
\hline
\multicolumn{1}{|r}{0} & 0 & 1 & \multicolumn{1}{r|}{4} & \cdot 13 \\
\hline
0 & 0 & -13 & -4 & \leftarrow + \\
\hline
\multicolumn{1}{|r}{0} & 0 & 0 & \multicolumn{1}{r|}{48} & \\
\hline
\end{array}
$$

Also $\det(A) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -(1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 48) = 48.$.

Aufgabe 2.2. Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$
\det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ -\cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix}
$$

$$
\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4711 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 2.3. Berechnen Sie die folgenden Determinanten möglichst geschickt:

$$
\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & -8 & -6 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

2.3 Rang, Kern und Bild einer $n \times n$-Matrix

Erinnerung: Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ heißen **linear abhängig**, falls es Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gibt, *die nicht alle gleich 0 sind (!)*, so dass

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Äquivalent dazu ist, dass sich einer der Vektoren als Linearkombination der $n-1$ anderen schreiben lässt. Wenn das nicht der Fall ist, heißen $v_1, v_2, \dots, v_n$ **linear unabhängig**. Auf einem Logiklevel höher kann man die erste Bedingung auch so ausdrücken: Aus

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

folgt, dass alle λ_i gleich 0 sind ($i = 1, 2, \dots, n$). Das ist eine sperrige Definition. Praktisch testet man die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ auf lineare Abhängigkeit so: Man schreibt die Vektoren als Zeilenvektoren in n Zeilen hin. Dann wendet man darauf das *Gauss-Verfahren* an. Die Vektoren sind linear unabhängig, falls n Zeilen übrig bleiben (d.h. keine ist eine Zeile, in der nur Nullen stehen).

Beispiel 2.4. Gegeben seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gauss-Verfahren anwenden:

$$\begin{array}{rrrl}
1 & 0 & 1 & \cdot 2 \\
2 & 3 & 1 & - \\
1 & 6 & -1 & - \\
\hline
1 & 0 & 1 & \\
0 & -3 & 1 & \cdot 2 \\
0 & -6 & 2 & - \\
\hline
1 & 0 & 1 & \\
0 & -3 & 1 & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Wir sehen eine Nullzeile, also sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

Ein ganz ähnlicher Begriff ist der Rang einer $n \times n$-Matrix: Es ist die Zahl der linear unabhängigen Zeilen. Praktisch berechnet man den Rang ganz wie oben: Man schreibt die Matrix hin, wendet das Gauss-Verfahren an, um Stufenform herzustellen. Der **Rang** der Matrix ist dann die Zahl der Zeilen, die keine Nullzeilen sind.

Beispiel 2.5. 1. Rang$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} = 2$, siehe letztes Beispiel.

2. Rang$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 3$ (hat schon Stufenform, keine Nullzeilen).

3. Rang$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ (hat schon Stufenform, eine Nullzeile).

4. Rang$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ (hat schon Stufenform, zwei Nullzeilen).

5. Rang$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$, denn es gilt Fakt 1 von den Rechenregeln für Determinanten oben. Diese Matrix ist die Transponierte A^T der Matrix A aus Beispiel 1.

Fakten zum Rang, Kern und Bild von $n \times n$-Matrizen:

1. $\text{Rang}(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0$ ($\Leftrightarrow$ A^{-1} existiert.)
2. Immer gilt $0 \leq \text{Rang}(A) \leq n$.
3. Die Menge $\{Av \mid v \in \mathbb{R}^n\}$ heißt **Bild** von A oder kurz **Bild**(A).
   Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ die Spalten von A. Der von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aufgespannte Unterraum ist gleich Bild(A).
4. Die Dimension von Bild(A) ist Rang(A).
5. Die Menge $\{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$ heisst **Kern** von A oder kurz **Kern**(A). Das ist die Lösungsmenge des LGS $Av = 0$.
6. dimKern(A) + dimBild(A)=n.

Bemerkung zum letzten Fakt: Wenn A eine Matrix ist, dann ist $Ax = 0$ ein lineares Gleichungssystem. Das merkt man, wenn man das ausmultipliziert:

$$Ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & =0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & =0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\cdots & +a_{nn}x_n & =0 \end{array}$$

Aufgabe 2.6. Bestimmen Sie Rang, Bild und Kern der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Ist A eine $n \times n$-Matrix, und ist v ein Vektor, so dass $Av = \lambda v$ gilt (λ ist hier irgendeine reelle Zahl), dann heißt λ **Eigenwert** von A, v heißt **Eigenvektor** von A (zum Eigenwert λ, wenn man's präzisieren möchte).

Beispiel 3.1. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. Es ist $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, und $\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist kein Vielfaches von $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Also ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ kein Eigenvektor von A. **Vereinbarung:** Der Nullvektor u (alle Einträge gleich 0) erfüllt immer $Au = \lambda u$, für jedes λ. Das ist witzlos. Also legt man fest: Der Nullvektor ist nie Eigenvektor.

Weiter ist $\left(\begin{smallmatrix}3&4\\4&-3\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}10\\5\end{smallmatrix}\right)$, und $\left(\begin{smallmatrix}10\\5\end{smallmatrix}\right)$ ist genau 5 mal $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Also ist $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 5.

3.1 Eigenwerte berechnen

Wie berechnet man alle Eigenwerte einer Matrix? Man kann sich überlegen:

$$Av=\lambda v \quad\Leftrightarrow\quad Av=\lambda Ev \quad\Leftrightarrow\quad Av-\lambda Ev=0 \quad\Leftrightarrow\quad (A-\lambda E)v=0.$$

Die letzte Gleichung, aufgefasst als lineares Gleichungssytem, soll eine Lösung v haben, die nicht der Nullvektor ist. Dazu muss gelten: $\mathrm{Rang}(A-\lambda E)<n$ (vgl. “Fakten zum Rang von Matrizen” im letzten Kapitel). Also muss gelten $\det(A-\lambda E)=0$. Man beachte, dass wir A (und E) kennen, das λ ist die Unbekannte. (Das sie λ heißt und nicht x oder t oder so ist nur Tradition. Sie können die Unbekannte gerne x nennen, falls Sie keine griechischen Buchstaben mögen.) Wir müssen jene λ finden, die die Determinante zu Null machen.

Anstatt die obige Überlegung verstanden zu haben, kann man sich auch einfach merken:

> Die Eigenwerte der Matrix A sind genau die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms** $\det(A-\lambda E)$ (mit Vielfachheiten).

Dabei ist λ unbekannt. Die Determinante ist daher keine feste Zahl, sondern ein Ausdruck, in dem λ oder auch λ^2 auftreten kann. Dieser Ausdruck heißt daher charakteristisches Polynom.

Beispiel 3.2. Alle Eigenwerte der Matrix $\left(\begin{smallmatrix}3&4\\4&-3\end{smallmatrix}\right)$ aus dem Beispiel oben:

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda&4\\4&-3-\lambda\end{pmatrix}&=(3-\lambda)(-3-\lambda)-16\\&=-9-3\lambda+3\lambda+\lambda^2-16=\lambda^2-25.\end{aligned}$$

Also ist λ^2-25 das char. Polynom der Matrix. Seine Nullstellen sind 5 und -5, das sind die beiden Eigenwerte der Matrix.

Beispiel 3.3. Alle Eigenwerte von $A=\left(\begin{smallmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right)$. Berechne mit Sarrus das char. Polynom, also die Determinante von $A-\lambda E$.:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1-\lambda&-1&1\\-1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}&=(1-\lambda)^3-1-1-(1-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda)\\&=-\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1-5+3\lambda=-\lambda^3+3\lambda^2-4.\end{aligned}$$

Jetzt haben wir ein Problem. Quadratische Gleichungen (d.h. die höchste Potenz, in der die Unbekannte — hier λ — auftritt, ist zwei) kann man schnell mit der $p-q$-Formel lösen. Für kubische Gleichungen (höchste Potenz der Unbekannten ist drei) oder Gleichungen höheren Grades wird das im Allgemeinen sehr schwierig bis unmöglich. Man muss dann im Allgemeinen auf Näherungsmethoden zurückgreifen. Aber für uns gibt es einen effizienten Trick: Raten.

3.1.1 Nullstellen von Polynomen

> Hat ein Polynom nur ganze Zahlen als Koeffizienten, ist der höchste Koeffizient ± 1, und hat es eine ganze Zahl k als Nullstelle, so gilt: k ist Teiler des konstanten Koeffizienten des Polynoms.

Das Polynom von oben, $-\lambda^3+3\lambda^2-4$, hat ganze Zahlen als Koeffizienten (also nicht $\frac{2}{3}$ oder π oder $0,23$). Außerdem ist der höchste Koeffizient -1 (der von λ^3). Wenn wir also mal kühn annehmen, dass das Polynom eine ganzzahlige Nullstelle hat, so kommen nur Teiler des konstanten Koeffizienten, hier 4, in Frage. **Obacht:** auch negative Zahlen gelten hier als Teiler.

Es kommen also in Frage: $1, -1, 2, -2, 4, -4$.

Probieren wir 1: $-1^3+3\cdot 1^2-4=-1+3-4=-2$. Also ist 1 keine Nullstelle.

Probieren wir -1: $-(-1)^3+3\cdot(-1)^2-4=-(-1)+3-4=0$. Also ist -1 eine Nullstelle, somit ein Eigenwert. Yippie!

Wir wollen noch die anderen Eigenwerte. Das Gute ist, dass wir mit der Kenntnis, dass -1 Nullstelle des Polynoms ist, das Polynom vereinfachen können. Ein Faktor des Polynoms ist der **Linearfaktor** $(\lambda-(-1))$, also $(\lambda+1)$. Also Polynomdivision! (Aus technischen Gründen mit x statt mit λ.)

$$
\begin{array}{l}
\big(-x^3+3x^2 \qquad -4\big):\big(x+1\big)=-x^2+4x-4 \\
\underline{\;\;x^3\;+x^2\qquad} \\
\qquad\;\; 4x^2 \\
\quad\;\; \underline{-4x^2-4x} \\
\qquad\qquad -4x-4 \\
\qquad\qquad\; \underline{4x+4} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Die Nullstellen von $-\lambda^2+4\lambda-4$ bestimmen wir mit der $p-q$-Formel als 2 und 2. Denn wegen $-\lambda^3+3\lambda^2-4=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$ ist 2 doppelte Nullstelle des char. Polynoms. Das ist oben mit "Vielfachheit" gemeint: Die gefundenen Nullstellen sind die Eigenwerte von A. Also hat A als Eigenwerte -1 (einfach) und 2 (doppelt).

3.1.2 Komplexe Zahlen

Es ist ärgerlich, dass eine quadratische Gleichung, also etwa eine der Form x^2+px+q, entweder zwei Lösungen hat, oder eine, oder keine. Es wäre schöner, wenn es *immer* zwei Lösungen gäbe (oder meinetwegen immer eine, oder immer keine). Dieses Problem stellt sich nur innerhalb der reellen Zahlen, also in $\mathbb{R}$. Vergrößert man $\mathbb{R}$ zu dem Zahlbereich der **komplexen Zahlen**, kurz $\mathbb{C}$, dann hat eine quadratische Gleichung *immer* zwei Lösungen.

Dazu führt man die "Zahl" i ein mit der Eigenschaft $i^2=-1$. Dann ist die Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C}=\{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}.$$

Z.B. sind $2+3i$, $\frac{1}{2}-\pi i$, $3+0i=3$ und $0-2i=-2i$ komplexe Zahlen.

Gerechnet wird mit komplexen Zahlen so, wie man sich das denken würde: Z.B. ist $1+2i\ +\ 3+4i = (1+3)+(2+4)i = 4+6i$, und

$$(1+2i)\cdot(3+4i) = 1\cdot 2+1\cdot 4i+2i\cdot 3+2i\cdot 4i = 2+4i+6i+8i^2 = 2+10i-8 = -6+10i.$$

Dividieren ist etwas kniffliger. Dazu brauchen wir den Begriff der **konjugiert komplexen** Zahl. Die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ zu $z=a+bi$ ist $\overline{z}=a-bi$. Der Witz ist, dass $z\cdot\overline{z}$ immer eine reelle Zahl ist:

$$z\cdot\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-b^2+abi-abi = a^2+b^2.$$

Das nützt beim Dividieren, bzw zum Vereinfachen des Ergebnisses in die Form $a+bi$. Der Trick ist immer: x/z mit der konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$ erweitern. So z.B.:

$$(1-7i)/(1-2i) = \frac{(1-7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{15-5i}{5} = 3-i.$$

Mit der Einführung der komplexen Zahlen hat jetzt jede quadratische Gleichung genau zwei Lösungen! Allgemeiner gilt:

> Ein Polynom vom Grad n hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt, z.B. ist 0 dreifache Nullstelle von $p(x)=x^3$). Komplexe Nullstellen tauchen immer paarweise auf: Ist $a+bi$ Nullstelle des Polynoms, so auch $a-bi$.

Beispiel 3.4. Alle Eigenwerte von $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 4 & 0 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ berechnen. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1\\ 4 & -\lambda & -4\\ -1 & 1 & -\lambda\end{pmatrix} = -\lambda^3-9\lambda.$$

Offensichtlich ist 0 eine Nullstelle, also ein Eigenwert von A. Die anderen sind nach der $p-q$-Formel $\sqrt{-3}=3i$ und $-\sqrt{-3}=-3i$. Das sind keine reellen Zahlen. Also hat A nur einen reellen Eigenwert. Aber insgesamt hat A die drei Eigenwerte $0, 3i, -3i$.

Aufgabe 3.5. Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & -4 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -3 & -3 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -6 & -3 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

(zur Kontrolle: hier kommen nur reelle ganze Zahlen raus.)

Aufgabe 3.6. Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Eigenvektoren berechnen

Wenn wir die Eigenwerte kennen, können wir zu ihnen auch die Eigenvektoren berechnen.

> Die Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ sind Lösungen v des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda E)v = 0$.

Hier ist nun λ keine Unbekannte mehr, sondern wir setzen die gefunden Eigenwerte für λ ein. Dann müssen wir so viele lineare Gleichungssysteme lösen, wie es Eigenwerte gibt.

Beispiel 3.7. Wir berechnen Eigenvektoren zu den Eigenwerten aus Beispiel 3.3. Zunächst suchen wir einen Eigenvektor $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ zum Eigenwert -1. Dazu lösen wir das lineare Gleichungssytem $(A-(-1)E)v = 0$:

$$\begin{array}{rrrl}
\boxed{2} & \boxed{-1} & \boxed{1} & \\
-1 & 2 & 1 & \cdot 2 \\
1 & 1 & 2 & \cdot -2 \\
\hline
\boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{3} & \\
0 & -3 & -3 & \\
\hline
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Also ist ein v_i frei wählbar, z.B. $v_3 = 1$. Wegen $3v_2 + 3v_3 = 0$ ist dann $v_2 = -1$. Wegen $2v_1 - v_2 + v_3 = 0$ ist dann $v_1 = -1$. Also ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -1 etwa $v = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(Machen Sie eine Probe: Berechnen Sie Av und $(-1) \cdot v$ und vergleichen Sie!)

Jetzt suchen wir einen Eigenvektor $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ zum Eigenwert 2. Dazu lösen wir das lineare Gleichungssytem $A - 2E = 0$:

$$\begin{array}{rrrl}
\boxed{-1} & \boxed{-1} & \boxed{1} & \\
-1 & -1 & 1 & - \\
1 & 1 & -1 & + \\
\hline
0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Hier bleibt nur eine Zeile übrig, die keine Nullzeile ist. Also sind zwei v_i frei wählbar, etwa v_2 und v_3. Wegen $-v_1 - v_2 + v_3 = 0$ ist dann $v_1 = v_2 - v_3$. Eigenvektoren zum Eigenwert 2 sind dann z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Das letzte Beispiel zeigt zweierlei. Erstens: Jedes Vielfache eines Eigenvektors ist wieder Eigenvektor, zum selben Eigenwert. Hätten wir oben beim Eigenvektor zum Eigenwert -1 etwa $v_3 = 2$ gewählt, hätten wir den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ erhalten. Genauso ist $\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ -1000 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert -1.

Zweitens sehen wir bei den Eigenvektoren zum Eigenwert 2, dass es auch mehrere Eigenvektoren zu einem Eigenwert geben kann, die *nicht* Vielfache voneinander sind. Das kann genau dann passieren, wenn wir einen Eigenwert mit Vielfachheit größer als 1 haben. (Hier: 2 war doppelte Nullstelle des char. Polynoms, also Vielfachheit 2.)

Vielfachheit: Diese Effekte haben Namen. Falls ein Eigenwert λ k-fache Nullstelle des char. Polynoms ist, sagen wir, λ hat **algebraische Vielfachheit** k. Im obigen Beispiel ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts -1 eins, die des Eigenwerts 2 ist zwei. Die Zahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zu einem Eigenwert heißt **geometrische Vielfachheit**. Im obigen Beispiel ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts -1 eins, die des Eigenwerts 2 ist zwei. Hier stimmen also geometrische und algebraische Vielfachheit überein. Das ist nicht immer so. Allgemeiner gelten folgende Eigenschaften.

Fakten zu Eigenwerten und Eigenvektoren:

1. Zu jedem Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit k gibt es mindestens einen Eigenvektor, und maximal k linear unabhängige Eigenvektoren. In anderen Worten: Die geometrische Vielfachheit ist mindestens 1, maximal k. (Insbesondere ist die geometrische Vielfachheit immer kleiner oder gleich der algebraischen.)
2. Zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer linear unabhängig.
3. Sind alle Eigenwerte verschieden, so gibt es also n linear unabhängige Eigenvektoren.
4. Das Produkt aller Eigenwerte von A ist gleich $\det(A)$!
5. Die Summe aller Eigenwerte von A ist gleich spur(A). (spur(A) ist die Summe der Einträge auf der Hauptdiagonalen von A. Die Spur ist also sehr leicht auszurechnen.)
6. Ist A symmetrisch (also $A = A^T$), so hat A n reelle Eigenwerte, und n linear unabhängige Eigenvektoren.
7. Das char. Polynom von A hat immer die Form $(-1)^n\lambda^n + (-1)^n \mathrm{spur}(A) + \cdots + \det(A)$.

Für Kapitel 5 brauchen wir noch den Begriff des Eigenraums: Der Untervektorraum, der von allen Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ aufgespannt wird (das ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems zur Bestimmung der jeweiligen Eigenvektoren), heißt **Eigenraum** zum Eigenwert λ. Hat λ die geometrische Vielfachheit k, so ist die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert λ gerade k.

Hat man die Eigenvektoren berechnet, so hat man automatisch die Eigenräume berechnet: Der Eigenraum zum Eigenwert λ ist Eig(λ,A)=spann($v_1, \dots, v_k$), wenn $v_1, \dots, v_k$ die Eigenvektoren zu λ sind.

Aufgabe 3.8. Berechnen Sie Eigenvektoren und Eigenräume der Matrizen aus Aufgabe 3.5. Machen Sie eine Probe, in dem Sie für jeden gefundenen Eigenvektor v zum Eigenwert λ der Matrix A die Ausdrücke Av und λv berechnen und vergleichen.

4 Diagonalisierbarkeit

Zwei Matrizen A und B heißen **ähnlich**, falls es eine Matrix P gibt mit $P^{-1}AP = B$.

Fakt: Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte. Also auch dieselbe Determinante, denselben Rang, dieselbe Spur, dasselbe char. Polynom. (Achung: Nicht unbedingt dieselben Eigenvektoren!)

Quizfrage: Wann ist eine Matrix A ähnlich zu einer Diagonalmatrix?

Falls das der Fall ist, so heißt A **diagonalisierbar**.

Antwort: Genau dann, wenn für alle Eigenwerte von A gilt: die algebraische Vielfachheit ist gleich der geometrischen Vielfachheit. (Das ist unter anderem immer der Fall, wenn A symmetrisch ist, vgl. Fakt 6 auf Seite 18.)

Hier ist das Rezept zum Diagonalisieren einer Matrix A (und zum Prüfen, ob A überhaupt diagonalisierbar ist).

Diagonalisieren einer $n \times n$-Matrix A:

1. Eigenwerte von A bestimmen (falls Anzahl $< n$: A nicht diagonalisierbar).
2. n linear unabhängige Eigenvektoren bestimmen (falls es nur weniger als n gibt: A nicht diagonalisierbar).
3. Die Matrix P hinschreiben: Ihre Spalten sind die Eigenvektoren aus Schritt 2.
4. $P^{-1}AP$ hat Diagonalgestalt.

Obacht: Wir haben in diesem Kurs nicht besprochen, wie wir die Inverse P^{-1} ausrechnen! Das geschieht in Mathe I.

Beispiel 4.1. Ist $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ diagonaliserbar? Wenn ja, bestimme man eine Matrix P, so dass $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat.

1. Eigenwerte berechnen: Das char. Polynom ist

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(5-\lambda) + 4 + 4 - 4(2-\lambda) - 4(2-\lambda) - (5-\lambda) = \cdots$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7.$$

Wir raten die Nullstellen: 7,1,1, das sind dei Eigenwerte. (1 ist doppelte Nullstelle, also hat der Eigenwert 1 die algebraische Vielfachheit 2).

2. Lösen des Gleichungssystems $(A-1\cdot E)v=0$, also $\begin{matrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{matrix}$, liefert $\begin{pmatrix}v_2-2v_3\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$. Also (wähle zum Beispiel $v_3=0, v_2=1$) ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 etwa $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Mit $v_3=1, v_2=0$ ist ein weiterer Eigenvektor zum Eigenwert 1 $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

Lösen des Gleichungssystems $(A-7\cdot E)v=0$, also $\begin{matrix}-5&-1&2\\-1&-5&-2\\2&-2&-2\end{matrix}$, liefert etwa $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ als Eigenvektor zum Eigenwert 7. Damit haben wir drei linear unabhängige Eigenvektoren gefunden. A ist also diagonalisierbar.

3. Wir schreiben die Eigenvektoren in die Spalten von P, also $P=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

4. Es ist $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&7\end{pmatrix}$. (Diagonalgestalt!)

Aufgabe 4.2. Bestimmen Sie eine Matrix P, so dass $P^{-1}AP$ Diagonalform hat, wobei A jeweils eine der Matrizen aus Aufgabe 3.5 ist. Machen Sie jeweils eine Probe, indem Sie $P^{-1}AP$ berechnen und prüfen, ob dies wirklich Diagonalform hat. (Benutzen Sie z.B. Wolfram Alpha (online), um die Inverse P^{-1} auszurechnen: `inverse(((1,-2,1)(1,0,-1)(0,1,2))` berechnet die Inverse von P aus dem Beispiel oben.)

Mit Hilfe der Diagonalisierung kann man manchmal die **Quadratwurzel** aus einer Matrix ziehen. Die Quizfrage ist: Gegeben A, gesucht B mit $B^2=A$. (B^2 heißt natürlich $B\cdot B$). Dazu diagonalisiert man A, also findet P mit $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Dann hat $D=\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n})$ die Eigenschaft $D^2=P^{-1}AP$ (wegen der speziellen Form von D ist das leicht zu sehen, probieren!). Also ist

$$A=PD^2P^{-1}=PDP^{-1}PDP^{-1},\quad \text{also } (PDP^{-1})^2=A.$$

Achtung: 1. Beim Diagonalisieren ist die Reihenfolge $P^{-1}AP$, beim Quadratwurzelziehen aus Matrizen dagegen PDP^{-1}.
2. Das ganze geht natürlich nur gut, falls A diagonalisierbar ist. Selbst dann können im Allgemeinen komplexe (nichtreelle) Zahlen auftreten: wenn ein Eigenwerte λ_i negativ ist, dann ist $\sqrt{\lambda_i}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Die Aufgabenstellung gibt oft einen Hinweis.

Aufgabe 4.3. Bestimmen Sie B mit $B^2=A$ für $A=$

$$\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&-2\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3&-2\\-1&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&3i\\i&-i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}9&10&10\\8&20&19\\-8&-16&-15\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}16&30&30\\15&31&30\\-15&-30&-29\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1&6&6\\-5&-14&-18\\5&10&14\end{pmatrix}.$$

(Benutzen Sie z.B. wieder Wolfram Alpha (online), um die Inverse P^{-1} auszurechnen und die Matrixprodukte auszurechnen.)

5 Jordansche Normalform

Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar. Das Zweitbeste, was man haben kann ist die **Jordansche Normalform** (kurz: **JNF**).

Fakt: Falls A diagonaliserbar ist, $P^{-1}AP = D$, so <u>ist</u> D die JNF von A.

In dem Fall stehen auf der Hauptdiagonalen von D die Eigenwerte von A (vgl. Bsp. 4.1!)

Im allgemeinen sieht die JNF einer Matrix A so aus:

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_p \end{pmatrix},$$

wobei die J_i wiederum Matrizen sind (die sogenannten **Jordanblöcke**):

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Leere Positionen in dieser Matrix sollen Nullen sein. Die λ_i sind Eigenwerte der Matrix A. Die Jordanblöcke können auch 1×1-Matrizen sein. In dem Fall stehen da dann also einfach Zahlen. Nur falls ein Eigenwert mehrfach vorkommt, stehen da wirklich Blöcke.

Eigentlich ist die Reihenfolge egal. Um die JNF eindeutig zu machen, sortieren wir die Jordanblöcke nach der Größe der Eigenwerte (aufsteigend). Gibt es zu einem Eigenwert mehrere Jordanblöcke, so sortieren wir diese der Größe nach (absteigend).

Hier ein konkretes Beispiel: Die 7×7-Matrix A habe die Eigenwerte 2 (5-fach), 3 und 5 (je einfach). Dann kann die JNF von A so aussehen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & 0 & 2 & & \\ & & & & & 3 & \\ & & & & & & 5 \end{pmatrix}$$

Wieder sollen an den leeren Stellen in der Matrix Nullen stehen. Wir sehen hier oben links einen Jordanblock der Größe 3×3, dann einen der Größe 2×2 (je zum Eigenwert 2), dann zwei Blöcke der Größe 1×1 (zu den Eigenwerten 3 bzw 5).

Fakt: Die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ sagt uns, wie oft λ auf der Hauptdiagonale der JNF auftaucht.
Die geometrische Vielfachheit von λ sagt uns, wieviel Jordanblöcke es gibt, die λ enthalten.

Oft reichen diese Informationen aus, um die JNF einer Matrix konkret hinzuschreiben. Wenn wir wissen, dass A die Eigenwerte 2 (algebraische Vielfachheit 5, geometrische Vielfachheit 2), 3 (algebraische Vielfachheit 1, also geometrische Vielfachheit auch 1) und 5 (algebraische Vielfachheit 1, also geometrische Vielfachheit auch 1) hat, dann gibt es nur noch wenige Möglichkeiten: Die JNF muss aussehen wie oben, oder so:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 3 & \\ & & & & & & 5 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir ein anderes Beispiel.

Beispiel 5.1. Wir bestimmen die JNF von

$$A = \begin{pmatrix} -30 & -144 & -51 & -48 \\ 14 & 60 & 17 & 16 \\ 8 & 32 & 18 & 12 \\ -10 & -32 & -11 & -4 \end{pmatrix}.$$

Für das char. Polynom erhalten wir (nach mühseliger Rechnung) $(\lambda-24)(\lambda-12)(\lambda-4)^2$. Die Eigenwerte sind also 24, 12 und 4 (2-fach). Damit ist bereits klar: Die JNF von A sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Nur der Eintrag mit dem ? ist jetzt noch unbekannt. Dazu müssen wir die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 4 bestimmen. Ist sie 1, dann steht bei dem ? eine 1. Ist sie zwei, dann steht bei dem ? eine 0.

Wir lösen das Gleichungssystem $(A-4\cdot E)v=0$, also $\begin{smallmatrix} -34 & -144 & -51 & -48 \\ 14 & 60 & 17 & 16 \\ 8 & 32 & 13 & 12 \\ -10 & -32 & -11 & -8 \end{smallmatrix}$. Die allgemeine Lösung ist $\begin{pmatrix} -3v_2 \\ v_2 \\ 2v_2 \\ -3v_2 \end{pmatrix}$. Es gibt nur einen frei wählbaren Parameter: v_2, also ist die geometrische Vielfachheit 1 (also die Dimension der Lösungsmenge 1, also die Dimension des Eigenraums 1). Somit gibt es nur einen Jordanblock zum Eigenwert 4. An Stelle des ? steht oben eine 1.

Falls die Aufgabe lautet: "Bestimmen Sie eine Matrix P, so dass $P^{-1}AP$ die Jordansche Normalform von A ist" (oder so), geht man ähnlich wie beim Diagonalisieren vor (siehe Kasten auf Seite 19). Es wird aber etwas länglich, falls man keine n Eigenvektoren findet (falls also bei mind. einem Eigenvektor die algebraische Vielfachheit größer ist als die geometrische). Dann geht man so vor (λ sei der Eigenwert mit zu wenig Eigenvektoren):

Vorgehen für den Fall, das zu λ nur ein Jordanblock Größe 2 oder mehr hat Zum Bestimmen der Eigenvektoren zu λ hatten wir das LGS $(A-\lambda E)v = 0$ gelöst. Wir lösen nun nacheinander die LGS $(A-\lambda E)^2 v = 0$, $(A-\lambda E)^3 v = 0$ usw. bis eines dieser LGS, sagen wir $(A-\lambda E)^k = 0$, genau die richtige Anzahl von linear unabh. Lösungsvektoren hat. (Also genau "algebraische Vielfachheit" viele.) Nun suchen wir aus diesen einen Vektor v aus, der nicht in der Lösungsmenge von $(A-\lambda E)^{k-1}$ liegt. (Das kann knifflig sein!) Dann sind v, $(A-\lambda E)v, \ldots, (A-\lambda E)^{k-1}v$ die gesuchten Vektoren, die uns P liefern: Die Spalten von P sind die so erhaltenen Vektoren, evtl. zusammen mit weiteren (linear unabhängig dazu gewählten!) Eigenvektoren.

Die Reihenfolge, in der wir die Vektoren in P schreiben ist

$$(A-\lambda E)^{k-1}v, \ldots, (A-\lambda E)v, v, \text{Rest}$$

Das k aus dem letzten Abschnitt liefert die Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ.

Vorgehen für den Fall, das zu λ mehrere Jordanblöcke Größe 2 oder mehr haben (Dann nur, falls diese gleich groß sind) Sagen wir, es gibt ℓ Blöcke der Größe k. Wie oben, bis "Nun suchen wir aus diesen...", da geht's weiter mit:

Nun suchen wir aus diesen ℓ Vektoren $v, w, \ldots$ aus, und berechnen v, $(A-\lambda E)v, \ldots, (A-\lambda E)^{k-1}v$, w, $(A-\lambda E)w, \ldots, (A-\lambda E)^{k-1}w$ usw. Das sind die Vektoren, die uns P liefern. Die Reihenfolge, in der wir die Vektoren in P schreiben ist

$$(A-\lambda E)^{k-1}v, \ldots, (A-\lambda E)v, v, (A-\lambda E)^{k-1}w, \ldots, (A-\lambda E)w, w, \text{Rest}.$$

"Rest" steht wieder für weitere Eigenvektoren, die wir eventuell hinzunehmen müssen.

Alle Fälle die darüber hinaus gehen werden höllekompliziert.

[xxx Beispiel]

Bemerkung 5.2. Im allgemeinen reicht das obige Rezept noch nicht zur genauen Bestimmung der JNF einer wirklich großen Matrix! Für die weitereren Details siehe wikipedia, oder Lehrbücher zur Linearen Algebra. Wir beschränken uns hier auf das oben geschilderte, denn das reicht praktisch fast immer für das aus, worum es hier geht, nämlich für konkrete Beispiele mit Matrizen mit bis zu 5 oder 6 Zeilen. Vgl. dazu auch Aufgabe 5.7.

Genauer: die Infos, die wir nun mit unseren Mitteln berechnen können (Wie oft steht λ auf der Hauptdiagonale der JNF? Wieviele Jordanblöcke gehören zu λ? Was ist die Größe des größten Jordanblocks zu λ?) reichen aus zur eindeutigen Bestimmung der JNF, falls alle algebraischen Vielfachheiten kleiner als 7 sind.

Beispiel 5.3. Hat eine 5×5-Matrix die Eigenwerte 17 (einfach) und 44 (algebraische Vielfachheit: vier), dann kriegen wir durch Berechnung der Eigenvektoren die geometrische Vielfachheit raus.

Sagen wir, die wäre eins. Dann wissen wir, es gibt nur einen Jordanblock zum Eigenwert 44, fertig. Oder sagen wir, die geometrische Vielfachheit wäre zwei. Also zwei Jordanbläcke: die müssen dann entweder Größe 3 und 1 haben, oder 2 und 2. Jetzt prüfen wir, ob $(A-4E)^2 = 0$ vier Lösungen hat. Wenn ja, so hat der größte Jordanblock die Größe 2 (also 2 und 2, fertig). Wenn nein, dann ist der größte Jordanblock größer als 2, also 3, also 3 und 1, fertig.

Beispiel 5.4. Hätte die Aufgabe im Bsp 5.1 gelautet "finden Sie eine Matrix P, so dass $P^{-1}AP$ die JNF von A ist", so würden wir anfangen wie dort. Da hatten wir bereits die Eigenwerte mit ihren Vielfachheiten sowie einen Eigenvektor zum Eigenwert 4 ermittelt. Jetzt betrachten wir die anderen Eigenwerte 24 und 12, dazu lösen wir die LGS $(A-24E)v = 0$ und $(A-12E)v = 0$, und erhalten Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (zu 24) und $\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (zu 12).

Also haben wir momentan je einen Eigenvektor zu den Eigenwerten 24, 12 und 4. Der Eigenwert 4 hat aber algebraische Vielfachheit 2, also fehlt hier noch etwas. Wir lösen das LGS $(A-4E)^2 v = 0$ und erhalten die allgemeine Lösung $\begin{pmatrix} 3v_3+3v_4 \\ -v_3-v_4 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$. Das sind zwei freie Parameter, das ist gut! Die reichen uns aus, denn die algebraische Vielfachheit von 4 ist zwei. Nun müssen wir einen Vektor in der Lösungsmenge von $(A-4E)^2 v = 0$, also einen der Form $\begin{pmatrix} 3v_3+3v_4 \\ -v_3-v_4 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$, finden, der nicht in der Lösungsmenge von $(A-4E)v = 0$ liegt, also nicht von der Form $\begin{pmatrix} -3v_2 \\ v_2 \\ 2v_2 \\ -3v_2 \end{pmatrix}$ ist. Probieren wir einfach $v_3 = 0, v_4 = 1$, wir erhalten $v := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, der hat nicht die Form $\begin{pmatrix} -3v_2 \\ v_2 \\ 2v_2 \\ -3v_2 \end{pmatrix}$. Also sind wir fast fertig: Wir berechnen noch $(A-4E)v = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, und liefern die Antwort:

$$P = \begin{pmatrix} 9 & -7 & -6 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Probe bestätigt:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.5. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 & 6 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & 10 & 4 \\ 2 & 2 & -8 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & -15 & 6 & 9 \\ -2 & 8 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 16 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -14 & 2 & 0 \\ -5 & 24 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Manchmal kommen Aufgaben zur JNF auch verklausuliert daher, wie in der folgenden Aufgabe (Die Aufgabe ist ja gelöst, wenn man wie im Beispiel 5.4 vorgeht).

Aufgabe 5.6. Bestimmen Sie unter den Matrizen aus Aufgabe 3.5 diejenigen, die sich nicht diagonaliseren lassen. Bestimmen Sie für jede dieser Matrizen — nennen wir sie A — jeweils Matrizen P, so dass $P^{-1}AP$ Dreiecksgestalt hat.

Aufgabe 5.7. Wie sieht die Jordansche Normalform einer Matrix aus, deren charakteristisches Polynom lautet:

(a) $(\lambda+3)(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-4)$.

(b) $(\lambda+1)^2(\lambda-1)(\lambda+2)$, und es gibt keine zweidimensionalen Eigenräume.

(c) $\lambda^2(\lambda-3)(\lambda-2)$, und es gibt einen zweidimensionalen Eigenraum.

(d) $\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, und es gibt nur eindimensionale Eigenräume.

(e) $\lambda^2(\lambda-1)^3$, und es gibt keine zweidimensionalen Eigenräume.

(f) $\lambda^4(\lambda-1)$, und es gibt einen dreidimensionalen Eigenraum.

(Bei Aufgabe (e) gibt es zwei Möglichkeiten. Dank an Walter Hoh für die schöne Idee und die Aufgaben (d), (e) und (f).)

6 Metrik und orthogonale Matrizen

In diesem Abschnitt behandeln wir zwei Themen: Metriken, sowie Orthonormalbasen (ON-Basen) und das Gram-Schmidt-Verfahren.

6.1 Metrik

Wenn man in Vektorräumen (etwa $\mathbb{R}^3$) Geometrie betreiben will (etwa für Computerspiele oder Bildbearbeitung), braucht man Begriffe wie "Winkel", "Abstand" usw. Der "normale" Abstand zweier Punkte (x_1,x_2,x_3) und (y_1,y_2,y_3) im $\mathbb{R}^3$ — der mit unserer Wahrnehmung der realen Welt übereinstimmt — ist der **euklidische Abstand**. Bezeichnen wir die Abstandsfunktion mit d, so ist der Abstand $d(x,y)$ zwischen den Punkten $x \in \mathbb{R}^3$ und $y \in \mathbb{R}^3$ gleich

$$d((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

Mag kompliziert wirken. Dass das die richtige Idee ist, sieht man vielleicht eher am Abstand in $\mathbb{R}^2$: Für $x,y \in \mathbb{R}^2$ ist

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

Das liefert wegen des Satzes von Pythagoras den üblichen Abstandsbegriff.

Manchmal wünscht man sich andere Abstandsbegriffe. Daher fordert man einige sinnvolle Eigenschaften und nennt jedes d, dass diese Eigenschaften hat, eine **Metrik**.

Definition 6.1. Eine Abbildung $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik** auf $\mathbb{R}^n$, wenn für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt::

1. $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung)

Aufgabe 6.2. Prüfen Sie, ob die folgenden Definitionen jeweils eine Metrik definieren oder nicht. Wenn ja, beweisen Sie es. Wenn nicht, geben Sie an, welcher Punkt der Definition einer Metrik verletzt ist (evtl mit einem Gegenbeispiel).

(a) $d(x,y) = |x_1 - y_1|$ $(x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2)$.
(b) $d(x,y) = \frac{|x-y|}{xy}$, $(x, y \in \mathbb{R}^+)$.
(c) $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2|)$, $(x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2)$.
(d) $d(x,y) = |x_1 - y_1| + 2|x_2 - y_2|)$, $(x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2)$.
(e) $d(x,y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$, $(x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2)$.
(f) $d(x,y) = |x_1 - 2y_1| + |x_2 - 2y_2|)$, $(x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2)$.
(g) $d(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_x|)$, $(x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2)$.

Aufgabe 6.3. Zeigen Sie, dass für eine Metrik gilt (a) $d(x,y) \geq |d(x,z) - d(y,z)|$
(b) $d(x,y) - d(z,w) \leq d(x,z) + d(y,w)$

6.2 ON-Basen und das Gram-Schmidt-Verfahren

Definition 6.4. Die **Länge** (oder **(euklidische) Norm** eines Vektors $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ist

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

(Also gerade $\sqrt{d(x,y)}$, wenn d den euklidischen Abstand bezeichnet.) Der **Winkel** zwischen zwei Vektoren ist

$$\arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}, \text{ wobei } \langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

Auch diese Definition liefert für die Ebene $\mathbb{R}^2$ oder den Raum $\mathbb{R}^3$ genau das, was wir auch mit dem Lineal oder dem Winkelmesser messen würden.

Beispiel 6.5. Seien $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann sind die Längen

$$\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} = 3,7416\cdots \quad \text{und} \quad \|w\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2,8284\cdots,$$

der Winkel zwischen v und w ist

$$\arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \arccos \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2}{\sqrt{8}\sqrt{14}} = \arccos \frac{8}{\sqrt{112}} = 0,7137\cdots$$

im Bogenmaß. Also $\frac{180°}{\pi}0,7137\dots = 40,893\dots°$. Der Winkel zwischen v und u ist

$$\arccos\frac{\langle v,u\rangle}{\|v\|\|u\|}, = \arccos\frac{-1-2+3}{\sqrt{14}\sqrt{3}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

im Bogenmaß, also genau 90°. Die Vektoren u und v stehen also genau senkrecht zueinander!

Fakt (und Definition): Zwei Vektoren v und u sind **orthogonal** (senkrecht zueinander) genau dann, wenn $\langle v,u\rangle = 0$.

Oft möchte man “schöne” Basen finden. Eine schöne Basis wäre z.B. eine, in der je zwei Vektoren senkrecht zueinander sind, und jeder Vektor genau Länge 1 hat. Solche Basen haben einen Namen:

Definition 6.6. Eine Basis des $\mathbb{R}^n$ (oder eines Unterraums davon) heißt **Orthonormalbasis** (kurz: **ON-Basis**), wenn alle Vektoren orthogonal zueinander sind, und alle die Länge 1 haben.

Das O steht für die eine Eigenschaft: orthogonal; das N steht für die andere Eigenschaft: normal, also alle haben Länge 1. Ein Beispiel einer ON-Basis kennt jeder:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

also die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. (Man checke dies!)

Das **Gram-Schmidt-Verfahren** liefert zu einer gegebenen Basis (des $\mathbb{R}^n$ oder eines Unterraums davon) eine ON-Basis, die den gleichen Vektorraum bzw Unterraum erzeugt. Genauer:

Zu gegebenen Vektoren $v_1,\dots,v_m$ findet es eine ON-Basis $w_1,\dots,w_m$, die denselben Raum aufspannt.

Rezept Gram-Schmidt:

$$\begin{array}{ll}
u_1 = v_1; & w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \\
u_2 = v_2 - \frac{\langle u_1,v_2\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1; & w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} \\
u_3 = v_3 - \frac{\langle u_1,v_3\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1 - \frac{\langle u_2,v_3\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2; & w_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \\
\vdots & \vdots \\
u_k = v_k - \frac{\langle u_1,v_k\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1 - \frac{\langle u_2,v_k\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2 - \dots - \frac{\langle u_{k-1},v_k\rangle}{\langle u_{k-1},u_{k-1}\rangle}u_{k-1}; & w_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}
\end{array}$$

Man macht solange weiter, bis $k = m$ ist, dann hat man eine ON-Basis $w_1,\dots w_m$ gefunden. Oder solange bis ein $u_j = 0$ ist, dann war der Input $v_1,\dots,v_m$ linear abhängig (also keine Basis).

Beispiel 6.7. Wir wenden Gram-Schmidt auf die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}-4\\-3\\1\end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ an.

$$u_1 = v_1, \qquad , \qquad w_1 = \frac{\begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix}}{\sqrt{36+64}} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix}-4\\-3\\1\end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix}-4\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}\rangle \cdot \begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-3\\1\end{pmatrix} - (\frac{-9}{5}+\frac{4}{5}) \cdot \begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\ \frac{-12}{5}\\ \frac{9}{5}\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{\begin{pmatrix}-4\\ \frac{-12}{5}\\ \frac{9}{5}\end{pmatrix}}{\sqrt{16+\frac{144}{25}+\frac{81}{25}}} = \begin{pmatrix}\frac{-4}{5}\\ \frac{-12}{25}\\ \frac{9}{25}\end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}\rangle \cdot \begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{-4}{5}\\ \frac{-12}{25}\\ \frac{9}{25}\end{pmatrix}\rangle \cdot \begin{pmatrix}\frac{-4}{5}\\ \frac{-12}{25}\\ \frac{9}{25}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \frac{6}{25}\\ \frac{-8}{25}\end{pmatrix} \frac{7}{25} \begin{pmatrix}\frac{-4}{5}\\ \frac{-12}{25}\\ \frac{9}{25}\end{pmatrix} = \cdots = \frac{1}{625}\begin{pmatrix}1110\\-1184\\488\end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{125}{2\sqrt{28721}} u_3.$$

Das Beispiel zeigt, dass die Zahlen sehr unschöne Werte annehmen können. Dabei hatten wir hier noch Glück, erst im dritten Schritt — bei w_3 — treten Wurzeln auf, die nicht verschwinden. Die folgenden Übungsaufgaben gehen weitaus glatter auf.

Aufgabe 6.8. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis zu dem von den folgenden Vektoren aufgespannten Räumen:

(a) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.9. (a) Ergänzen Sie $v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

(b) Ergänzen Sie $v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\quad v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$.

Es gibt auch Vektorräume, deren Elemente keine Vektoren im obigen Sinne sind, sondern Funktionen. Die Menge aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich n ist ein solcher Vektorraum. Die Addition ist dann einfach die Addition zweier funktionen, und die Skalarmultiplikation die Multiplikation eines Polynoms mit einer Zahl. Z.B. für $p(x) = x^2 + x + 2$, $q(x) = 2x^2 + 5$ ist

$$p(x) + q(x) = 3x^2 + x + 7, \qquad 5p(x) = 5x^2 + 5x + 10$$

Eine naheliegende Wahl für die Basis ist $p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2, \ldots, p_n(x) = x^{n-1}$. Z.B. ist $\{1, x, x^2, x^3\}$ eine Basis des Raums der Polynome bis zum Grad 3.

Auch hier kann man sich fragen, wie eine ON-Basis aussieht. Dazu brauchen wir noch ein Skalarprodukt. Statt dem von oben (recall: $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$) ist hier ein geeignetes (dem Datentyp angepasstes) Skalarprodukt etwa

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad \text{oder} \quad \langle p, q \rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 p(x)q(x)dx, \quad \text{oder} \quad \langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^x dx, \quad \text{oder} \ldots$$

wenn p und q Polynome (oder allgemeiner irgendwelche Funktionen) sind.

Nun brauchen wir noch eine **Norm**. Ein Skalarprodukt liefert immer eine zugehörige Norm durch

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

Damit können wir nun Gram-Schmidt auf Vektorräume mit Funktionen als Elementen anwenden: Wir benutzen das selbe Rezept wie oben, nur haben jetzt $\langle p, q \rangle$ und $\|p\|$ eine andere Bedeutung.

[xxx Beispiel]

Aufgabe 6.10. Berechnen Sie aus den folgenden Basen des Vektorraums der Polynome vom Grad ≤ 2 eine ON-Basis.

(a) $\{1, x, x^2\}$ mit $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$

(b) $\{1, 1+x, 1+x^2\}$ mit $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$

(c) $\{1, 1+x, 1+x^2\}$ mit $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

(d) $\{1, x, x^2\}$ mit $\langle p,q\rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}dx$

(e) $\{1, 1+x, 1+x^2\}$ mit $\langle p,q\rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}dx$

(Tipp: Das Normalisieren, also das Berechnen von $w_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$, kann sehr aufwendig werden. Falls es zu schlimm wird, aufhören, oder Computereinsatz.)

Aufgabe 6.11. Wenden Sie Gram-Schmidt an auf $v_1 = 1$, $v_2 = \sin(x)$ und $v_3 = \cos(x)$, wobei

$$\langle p,q\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(x)q(x)dx.$$

Part II

Analysis

Der Analysisteil der Veranstaltung umfasst drei große Themen: (Extrema von) Funktionen mit mehreren Variablen, Differentialgleichungen, mehrdimensionale Integrale.

7 Extrema von Funktionen mit mehreren Variablen

References

[BAA] Leitfaden Mathe I und II für NW, Baake, Loquias, Zeiner, 2010/11 (hab ich als Papierkopie)

Für Grundlagen:

[AUF1] Frettlöh, Dirk: Auffrischungskurs Mathematik I, online `http://www.math.uni-bielefeld.de/ frettloe/teach/auffr-mfnw1-13.html`

[P1] Papula, Lothar: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1, Vieweg und Teubner, Wiesbaden 2011 (online in der Unibib verfügbar)

[P2] Papula, Lothar: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2, Vieweg und Teubner, Wiesbaden 2011 (online in der Unibib verfügbar)

Zum LinA-Teil:

[BO] Bosch, Siegfried: Lineare Algebra, Springer 2008 (online in der Unibib verfügbar)

[FI] Fischer, Gerd: Lineare Algebra, Vieweg und Teubner, (online in der Unibib verfügbar)

Zum Ana-Teil:

[H1] Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Vieweg und Teubner (viele gedruckte Exemplare in der Unibib)

[H2] Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis, Teil 2, Vieweg und Teubner (viele gedruckte Exemplare in der Unibib)

[H3] Heuser, Harro: Gewöhnliche Differentialgleichungen Vieweg und Teubner (einige gedruckte Exemplare in der Unibib)

[F1] Furlan, Peter: Das Gelbe Rechenbuch 2, Verlag Martina Furlan, Dortmund 2006

[F2] Furlan, Peter: Das Gelbe Rechenbuch 3, Verlag Martina Furlan, Dortmund 2006

Für alles:

[WIK] Online: `http://en.wikipedia.org`