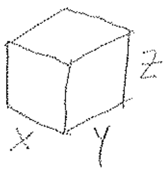
Extrema mit Nebenbedingungen („NB")

<u>Bsp</u> Was ist das maximale Volumen einer (quaderförmigen) Schachtel, die ich aus Karton der Fläche 6 herstellen kann?



- Vol: $x \cdot y \cdot z = \tilde{f}(x,y,z)$ max!
- Nebenbedingung $2 \times \square_y\, z + 2 \times \square_x\, z + 2 \times \square_x\, y$

$$2xy + 2xz + 2yz = 6$$

(evtl. weitere, z.B. $4x + 4y + 4z = 12$)

> <u>2 Methoden:</u> <u>1.</u> Die K Nebenbed. nach K Variablen auflösen, dann wie Extrema ohne NB
> <u>2.</u> Lagrangesche Multiplikatoren

<u>zu 1.</u> Bei Bsp. aus der Vorles. fast immer möglich, oft einfacher. <u>Nachteil:</u> Man muss mitdenken! (s.u.)

<u>zu 2.</u> Oft aufwändigere Rechnung. Kein Mitdenken nötig.

<u>Bsp</u> oben nach Methode 1.: Löse NB nach z auf:

NB: $xy + xz + yz = 3 \Rightarrow z(x+y) = +3 - xy$

$\Rightarrow z = \frac{3-xy}{x+y}$. Damit wird $\tilde{f}(x,y,z)$ zu

$$f(x,y) = x \cdot y \cdot \frac{3-xy}{x+y} = \frac{3xy - x^2y^2}{x+y}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{(3y-2xy^2)(x+y) - (3xy - x^2y^2)}{(x+y)^2}, \frac{(3x-2x^2y)(x+y) - (3xy-x^2y^2)}{(x+y)^2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{3xy + 3y^2 - 2x^2y^2 - 2xy^3 - 3xy + x^2y^2}{(x+y)^2}; \frac{3x^2 + 3xy - 2x^3y - 2x^2y^2 - 3xy + x^2y^2}{(x+y)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{3y^2 - x^2y^2 - 2xy^3}{(x+y)^2} ; \frac{3x^2 - x^2y^2 - 2x^3y}{(x+y)^2} \right)$$

$$\overset{!}{=} 0 \Rightarrow y^2(3-x^2-2xy)=0 \wedge x^2(3-y^2-2xy)=0$$

$$\Rightarrow (\cancel{y=0} \vee x^2+2xy=3) \wedge (\cancel{x=0} \vee y^2+2xy=3)$$

(mitdenken!)

$\Rightarrow y = \frac{3-x^2}{2x}$ einsetzen in ↗ $\left(\frac{3-x^2}{2x}\right)^2 + 2x\frac{3-x^2}{2x} = 3$

$$\Rightarrow \frac{9-6x^2+x^4}{4x^2} = 3-(3-x^2) = x^2$$

$$\Rightarrow x^4-6x^2+9 = 4x^4$$

$$\Rightarrow -3x^4-6x^2+9=0 \Rightarrow x^4+2x^2-3=0$$

$$\Rightarrow x^2 = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{4}+3} = -1 \pm 2 = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} y=1 \\ z=\frac{3-1}{2}=1 \end{array}$$

pqF

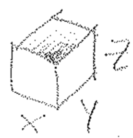
Einziger Kandidat (wg. $x>0, y>0, z>0$): $(1,1,1)$.

Jetzt Hess(f) hm... nö. Vol = 1

Aufg a) (Bsp oben umgedreht: Min Fl.; NB: Vol = 1)

Min. $2xy+2xz+2yz$ unter NB $xyz=1$

b)  Zyl. Dose, min. Fl. $= 2\pi x^2 + 2\pi xy$ unter NB (Vol = 1) $\pi x^2 y = 1$

c) offene Schachtel: 

Min $xy+2xz+2yz$ unter NB $xyz=1$

d) lokale Extrema von $x^2-xy+y^2+z^2+15x$ unter NB $x+y+z=0$

e) dito von $\frac{2}{3}x^3+5x^2+8x+4xy-4y^2+z$; NB $x^2+3y^2-z=0$

Lagrangesche Multiplikatoren

NB seien $g_1 = 0,\ g_2 = 0, \dots\ g_K = 0$

(1) Bilde die Matrix $\begin{pmatrix} \text{— grad } g_1 \text{ —} \\ \vdots \\ \text{— grad } g_K \text{ —} \end{pmatrix} = G(x,y,z)$

Alle Punkte (x,y,z) mit Rang $G(x,y,z) < K$ sind [~~Kandidaten~~] mögliche Extrema.

(2) Bilde $h(x,y,z,\lambda_1 \dots \lambda_K) = f - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_K g_K$

Alle Punkte (x,y,z) mit $\text{grad } h(x,y,z,\lambda_1 \dots \lambda_K) = 0$ sind mögliche Extrema.

Zeigen am Bsp. oben: (d)

$g_1(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z.$ $\quad$ $\text{grad } g_1: (2x, 6y, -1)$

$G_1 = (2x, 6y, -1)$: Rang immer 1

$h(x,y,z,\lambda_1)$
$= x^2 - xy + y^2 + z^2 + 15x$
$+ \lambda_1(x^2 + 3y^2 - z)$

$\text{grad } h(x,y,z,\lambda_1)$:

$$\begin{array}{l} 2x - y + 15 + 2\lambda_1 x \\ -x + 2y + 6\lambda_1 y \\ +2z - \lambda_1 \\ x^2 + 3y^2 - z \end{array}$$

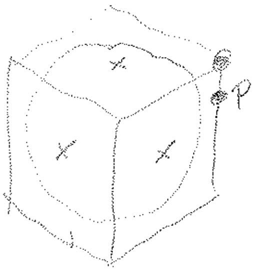
Lösen... kniffig.

Hier (Üb.! Klausur!) führt Methode 1 meistens zum Erfolg.

Achtung:
- Vorzeichen beachten (bei $\sqrt{x}$; x^2 im Term)
- Rand beachten (der NB-Funktion)

Bsp Min. Abstand Kugel - Punkt:

$$K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}\ ;\ P=(1,1,\tfrac{1}{2})$$



$$\tilde{f}(x,y,z) = d((x,y,z),P)$$

$$= \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-\tfrac{1}{2})^2} \quad \text{minimieren}$$

unter NB $x^2+y^2+z^2=1$. Besser $\tilde{f}^2$ minimieren:

! $\pm$ Mit $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$:

$$f_+(x,y) = x^2-2x+1+y^2-2y+1+1-x^2-y^2$$
$$-\sqrt{1-x^2-y^2}+\tfrac{1}{4} = -2x-2y+3\tfrac{1}{4}-\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$f_-(x,y) = x^2-2x+1+y^2-2y+1+1-x^2-y^2$$
$$+\sqrt{1-x^2-y^2}+\tfrac{1}{4} = -2x-2y+3\tfrac{1}{4}+\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\operatorname{grad} f_\pm(x,y) = \begin{pmatrix} -2 \pm \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ -2 \pm \frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow\ -2 = \pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \ \wedge\ -2 = \pm\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\Leftrightarrow\ -2\sqrt{1-x^2-y^2} = \pm x \qquad \wedge\ -2\sqrt{1-x^2-y^2} = \pm y$$

$$\Rightarrow\ 4(1-x^2-y^2) = x^2 \ \wedge\ 4(1-x^2-y^2) = y^2$$

$$\Rightarrow\ x^2 = y^2 \quad \text{und} \quad 4(1-2x^2) = x^2$$

$$\Rightarrow\ 4-8x^2 = x^2$$

$$\Rightarrow\ 4 = 9x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow\ x = \pm\frac{2}{3};\ y = \pm\frac{2}{3};\ z = \pm\sqrt{1-\tfrac{4}{9}-\tfrac{4}{9}} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$$

Kandidaten $(x,y,z) = \left(\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3}\right)$

! Rand

und Rand z: $z = \pm 1$; $x = y = 0$.

$$\tilde{f}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\tilde{f}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{29}}{3}$$

$\vdots$ (usw.)

$$\tilde{f}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{25}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{66}}{3}$$

Rand: $\tilde{f}(0,0,1) = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2 + \left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$\tilde{f}(0,0,-1) = \sqrt{1+1+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

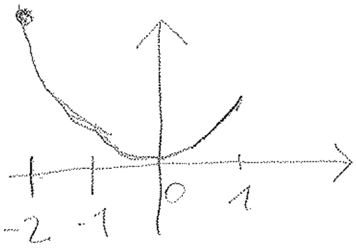
Der erste ist es: $\frac{\sqrt{6}}{3} < 1$ (denn $\sqrt{6} < 3$, da $6 < 9$)
alle andern Kandidaten haben $\tilde{f}(\ldots) > 1$.

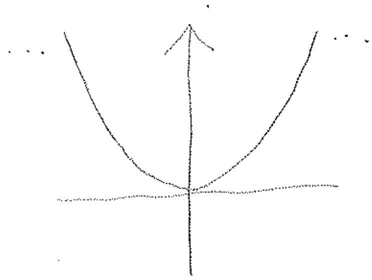
Hilfreich:

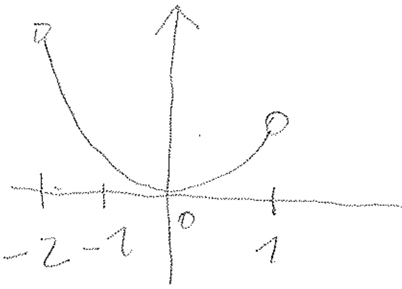
<u>Satz von Weierstraß</u> (oder Satz v. Minimum & Maximum)
Eine stetige Funktion mit kompaktem Def.-bereich hat ein Minimum und ein Maximum.

<u>zum Bsp oben:</u> Def.-bereich K kompakt (abgeschlossen & beschränkt), also <u>gibt's</u> Minimum, dieses muss unter den Kandidaten sein
$\rightsquigarrow$ endliche Liste $\rightsquigarrow$ Minimum gefunden.

Bsp zum Satz: $f(x)=x^2$ mit







$D=[-2;1]$ — Max bei -2

$D=\mathbb{R}$ — Kein Max.

$D=]-2,1[$ $(=(-2,1))$

2*) max Vol

Heuser, S.32…

Aufg f) Extrema von $f(x,y)=xy^2$ unter NB $x^2+y^2=1$

g) Min Abstand von $K=\{x^2+y^2=1\}$ zu $P=(1,2)$

h) Min Abstand von $\{z=xy\}$ zu $P=(1,0,0)$

j) —— " —— von $\{z=x^2+y^2\}$ zu $P=(1,1,\frac{1}{2})$

k) Min. Wert von $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, falls $x+y+z=1$; $x,y,z\geq 0$

m) Extrema von $2x+3y+2z$, NB $x+z=1$, $x^2+y^2=2$

S.32…, S.32…, S.321, 420

zu k) $\tilde{f}(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$; NB: $\Rightarrow z=1-x-y$

Also $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{1-x-y}$

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x-y)^2};\ -\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(1-x-y)^2}\right)\overset{!}{=}(0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x-y)^2}=\frac{1}{x^2}\ \wedge\ \frac{1}{(1-x-y)^2}=\frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow x^2=y^2\Rightarrow x=\pm y;\ \text{somit } \frac{1}{(1-x+x)^2}=\frac{1}{x^2}\ \vee\ \frac{1}{(1-2x)^2}=\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}=1\quad \vee\quad x^2=(1-2x)^2=1-4x+4x^2$$

$$\Rightarrow x=\pm 1\quad \vee\quad 3x^2-4x+1=0\Rightarrow x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0$$

p-q-F: $x=\frac{4}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{6}\right)^2-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{36}-\frac{12}{36}}=\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{36}}$

$$=\frac{2}{3}\pm\frac{2}{6}=\begin{cases}1\\ 1/3\end{cases}$$