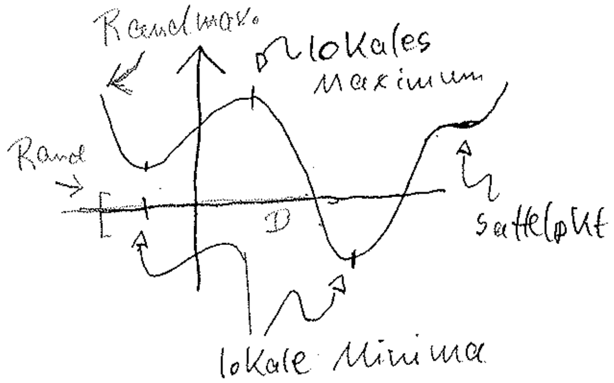
1. Extrema von Funktionen mit mehreren Variablen

<u>Recall</u> Extrema von $f(x)$: Maxima, Minima



Berechnen:

- Mögliche Extrema sind Nullst. von f'
- Die möglichen testet man einzeln, ob und was für Extrema sie sind. ($f''(x_0) > 0$? ...)

↑ 20.9.

Hier: $f(x,y)$; z.B. $f(x,y) = x^2+y^2$; [auch $f(x_1,x_2,x_3)$]

[Im Allg. auch $f(x,y,z)$; $f(x,y,z,t)$; hier nur $\mathbb{R}^2$ & $\mathbb{R}^3$] oder $f(x,y) = x \cdot y$,

oder $f(x,y) = x^3 + x^2 - x - y^4 + 8y^2$ oder $f(x,y) = x^2 - y^2$

[zeigen: Maple]

<u>Wir brauchen:</u> partielle Ableitung, Gradient, Hesse-matrix
(und später Differential Df)

<u>Def.</u> $f(x,y)$ gegeben. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ heißt „f nach x ableiten"; $\frac{\partial f}{\partial y}$ heißt — " — y — " —

<u>Bsp</u> $f(x,y) = x^2 + y^2$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$.

Die heißen (<u>erste</u>) „<u>partielle Ableitungen</u>"
(von f nach x bzw. von f nach y).

<u>Genauso:</u>

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$: f zweimal nach x ableiten

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$: — " — y — " —

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$: f erst nach x, dann nach y ableiten.

Diese heißen <u>zweite</u> partielle Ableitungen

Fakt (Satz v. Schwarz) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$; falls f „schön", d.h., falls alle zweiten part. Abl. existieren und stetig sind

! Das sei hier immer erfüllt!

Def. • Gradient von f: $\operatorname{grad}(f) = \cancel{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

• Hessematrix von f: $\operatorname{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

• Fakt: Gradient zeigt in Richtung steilster Anstieg!

Bsp $f(x,y) = x^4 + y^2 - z$ $\quad \operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix}^T = (4x^3, 2y, -1)$

$$\operatorname{Hess}(f) = \begin{pmatrix} 8x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung von Extrema

Rezept: ① $\operatorname{grad}(f)$ berechnen. Alle Punkte (x,y,z) finden mit $\operatorname{grad}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$. Dies sind mögliche Extrema.

② Für jeden dieser Punkte:

2.1 • Untersuchung mittels $\operatorname{Hess}(f)$. Falls das nicht klappt:

2.2 • —— " —— mittels Kurve durch den Pkt.

...

zu 2.1: Mögl. Extremum (x_0, y_0) in $\operatorname{Hess}(f)$ einsetzen. Eigenwerte berechnen.

a) Alle Eigw. > 0 („positiv definit") $\Rightarrow$ Minimum bei (x_0, y_0)

b) —— " —— < 0 („negativ definit") $\Rightarrow$ Maximum —— " ——

c) Sowohl > 0 als auch < 0 („indefinit") $\Rightarrow$ Sattelpunkt —— " ——

d) Alle Eigw. ≥ 0; (mind. einer $= 0$, mind. einer > 0) $\Rightarrow$ Min. oder Sattelp.

e) —— " —— ≤ 0, (—— " —— $= 0$ $\Rightarrow$ Max. —— " —— .

Achtung: • Alle Eigw. = 0 : Man kann nix sagen.

• Je nach Frage: Sattelpkt = „kein lokales Extr.

• A negativ definit $\Leftrightarrow$ $-A$ positiv definit

Bsp • Extrema von $f_1(x,y) = x^2 + y^2$; $f_2(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$

$f_3(x,y) = x \cdot y + x$

$$\operatorname{grad} f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0;$$ einziger Kandidat $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(s.o.)

$$\operatorname{grad} f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ -2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1,\ y = 0$$ Kandidat $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{grad} f_3(x,y) = \begin{pmatrix} y+1 \\ x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -1;\ x = 0$$ Kandidat $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Hess} f_1(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ (gibt nix einzusetzen) Eigw. 2, 2 $\Rightarrow$ Min. bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\operatorname{Hess} f_2(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ Eigw. 2, −2 $\Rightarrow$ Sattelpkt (also kein Extr.)

$$\operatorname{Hess} f_3(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Hm...

Trick: $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ = Produkt d. Eigw.

Hier nur 2 Eigw., also einer > 0, einer < 0

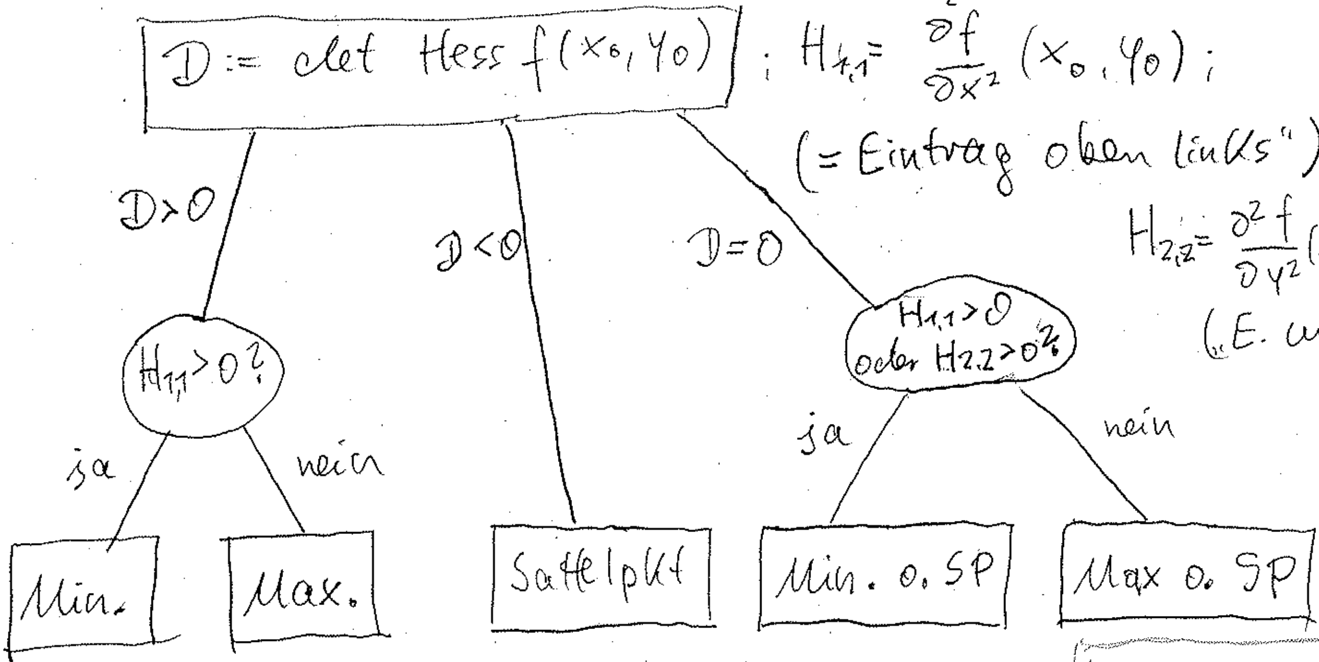
$\Rightarrow$ Sattelpkt., kein Extremum.

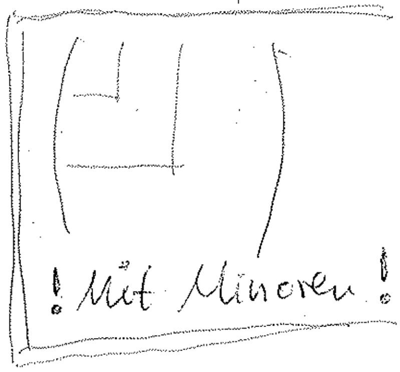
(Ausgefeilterer Trick:)

TRICK („Hurwitz Kriterium" für 2×2-Matrizen)

$H_{1,1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$; (= Eintrag oben links")

$H_{2,2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ („E. unten rechts")





Aufg.: Extrema bestimmen von

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x + y$

b) $g(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4y$

c) $h(x,y) = x^3 - 3y^2 x + 6y$

zu a) $\operatorname{grad}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y - 1 \\ -x + 2y + 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ -x + 2y &= -1 \quad \cdot 2 \end{aligned} \; +$$

$3y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$; $\quad 2x + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow 2x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.

Einziger Kandidat: $\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Hess}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hurwitz: $\operatorname{Det} = 3$; $H_{1,1} = 2$

also Minimum bei $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.