# 2. Differentialgleichungen (DGL)

Quizfrage: 1. $f'(x) = 2f(x)$, was ist $f$?

2. $f'(x) = \frac{1}{2f(x)}$; " ?

3. $f''(x) = -f(x)$; " ?

4. $f'(x) = -f(x)$; $f(0)=1$, " ?

Sowas heißt DGL. 1. & 2.: DGL 1. Ordnung;

3.: DGL höherer Ordnung (hier: zweiter);

4.: Anfangswertproblem (AWP).

## 2.1 DGL 1. Ordnung

Hier nur 2 Sorten:
- $y'(t) = f(y(t)) \cdot g(t)$ Trennung d. Veränderl.
- $y'(t) = a\,y(t) + h(t)$ $(a \in \mathbb{R})$ inhom. lin. DGL m. Konst. Koeffizienten

$\boxed{\text{! Ab jetzt: } y \text{ bezeichnet die gesuchte Funktion, } t \text{ ist die Variable (nach der abgeleitet wird.)}}$

Bsp zu 1.: $y'(t) = \underbrace{(2y+1)}_{f(y)} \cdot \underbrace{t^2}_{g(t)}$

oder auch

$$y'(t) = \underbrace{\frac{1}{(y(t))^2}}_{f(y)} \cdot \underbrace{\cos^2(t) \cdot \sin(t)}_{g(t)}$$

oder auch $\frac{y'}{t} = y(t)+1$

$$y'(t) = y(t) \cdot \cancel{t} + t;$$

denn $\Leftrightarrow y'(t) = (y(t)+1) \cdot t$

Zu 2.: $y'(t) = 3y(t) + \sin(t)$

$y'(t) = -y(t) + t^2$

Zu TdV $\quad y'(t) = f(y(t)) \cdot g(t)$

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t)$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(t)}{f(y(t))} \cdot dt = \int g(t)\,dt + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{f(v)}\,dv = \int g(t)\,dt + c \quad ;$$

(Subst.-regel)

Integrale berechnen, nach $v$ auflösen.

Praktisch so: Löse $\quad y'(t) = (2y(t)+1)\cdot t^2 \quad | : (2y(t)+1)$

(schreibe $y'(t)$ als $\frac{dy}{dt}$:) $\quad \frac{1}{2y+1}\frac{dy}{dt} = t^2 \quad |$ „$\cdot\, dt$" (!)

(Integralzeichen:) $\Rightarrow \int \frac{1}{2y+1}\,dy = \int t^2\,dt + c$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\ln(2y+1) = \frac{1}{3}t^3 + c$$

$$\Rightarrow \ln(2y+1) = \frac{2}{3}t^3 + 2c \qquad | e^{\wedge}$$

$$\Rightarrow 2y+1 = e^{2/3 t^3 + 2c}$$

$$\Rightarrow y = y(t) = \frac{1}{2}e^{2/3 t^3}\cdot\underbrace{e^{2c}}_{\text{irgendeine Konstante: } \tilde{c}} - \frac{1}{2}$$

Also $\quad y(t) = \frac{1}{2}\cdot\tilde{c}\cdot e^{\frac{2}{3}t^3} - \frac{1}{2}\quad$ allg. Lös; $\tilde{c} \in \mathbb{R}^+$

Gut ist: Man kann hier immer eine Probe machen!

(Lösen: schwierig, Probe: einfach)

53

Probe: $y'(t) = \frac{1}{2}\cdot\tilde{c}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3t^2\cdot e^{\frac{2}{3}t^3} = \tilde{c}\cdot t^2\cdot e^{\frac{2}{3}t^3}$

$$(2y(t)+1)\cdot t^2 = \left(2\left(\tfrac{1}{2}\tilde{c}e^{\frac{2}{3}t^3} - \tfrac{1}{2}\right)+1\right)\cdot t^2$$

$$= \left(\tilde{c}e^{\frac{2}{3}t^3} - 1 + 1\right)\cdot t^2 = \tilde{c}\cdot e^{\frac{2}{3}t^3}\cdot t^2$$

a0) $y' = t\cdot y$ a1) $y' = \frac{y}{t}$

Aufg. a2) $y'(t) = -\frac{t}{y(t)}$ $\left(\frac{dy}{dt} = \frac{-t}{y} \rightsquigarrow \int y\,dy = -\int t\,dt \rightsquigarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}t^2 + c\right)$

$y = \pm\sqrt{2c - t^2}$

b) $y'(t) = \frac{t^2}{y(t)^3}$ Fürlam 3 S.14

f) $y' = \frac{1}{y^2}\cdot\cos^2(t)\cdot\sin(t)$

c) $y'(1+t^2) - t/\sin(y) = 0$

d) $y'/\sin(t) = e^y$ $\left(\frac{dy}{dt} = e^y\sin t \rightsquigarrow \int e^{-y}dy = \int \sin t\,dt\right.$

$-e^{-y} = -\cos t + c$

$y(t) = -\ln(c - \cos t)$

$e^*$) $y'(t)\cdot y\cdot\cos(y) = t\cdot e^{2t}$

Zu $e^*$:) $\frac{dy}{dt}\,y\cos(y) = te^{2t}$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\int \underbrace{y}_{f}\,\underbrace{\cos(y)}_{g'}\,dy}_{L} = \underbrace{\int \underbrace{t}_{f}\,e^{2t}\,dt}_{R}$$

$L = y\sin y - \int 1\cdot\sin y\,dy = y\sin y + \cos y$

$R = t\cdot\frac{1}{2}e^{2t} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2t}dt = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} = \left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)e^{2t}$

$\Rightarrow y\cdot\sin y + \cos y = \left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)e^{2t}$ geht nicht aufzulösen!

f) $y' = \frac{y}{t^2}$

g) $y' = \sin(t)\cdot y$

Manchmal muss man etwas tricksen, um die Form $y' = f(y)\,g(t)$ hinzukriegen. siehe c) d);
aber auch: vgl. Üb. Bl. 9

$$t\,y' = y + \sqrt{y^2 + t^2} \qquad | : t$$

$$y' = \frac{y}{t} + \sqrt{\frac{y^2}{t^2} + \frac{t^2}{t^2}} = \frac{y}{t} + \sqrt{\left(\frac{y}{t}\right)^2 + 1}$$

Substituieren: $z = \frac{y}{t}$ $\left( \Rightarrow y = z \cdot t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = z + t\frac{dz}{dt} \right)$

$$\rightsquigarrow \quad z + t\frac{dz}{dt} = z + \sqrt{z^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad t\frac{dz}{dt} = \sqrt{z^2+1} \quad \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\,dz = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arsinh}(z) = \ln(t) + c$$

Tabelle

$$\Rightarrow \quad z = \sinh(\ln(t) + c)$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln t + c} - e^{-(\ln t + c)}\right) = \frac{1}{2}\left(c \cdot t - \frac{1}{c \cdot t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2}\left(c t^2 - \frac{1}{c}\right)$$

- Tipp: Hier wohl nur $z = \frac{y}{t}$ oder $z = ax + by + c$

Dazu später auch Aufg. Erstmal:

## Lineare Dgl 1. Ordnung

a) $y' = a \cdot y$ ← homogen (mit Konst. Koeff.!)

b) $y' = a \cdot y + h(t)$ ← inhomogen.

a) Können wir: TdV. (mit $g(t) = 1$)

Wir können sogar eine allgem. „Formel" herleiten:

$$\frac{dy}{dt} = g(t)\cdot y \rightsquigarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int g(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \ln y = \int g(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \exp\left(\int g(t)\,dt\right)}$$

Insbes. $g(t) = a$ (Konst. Fktn.)

$$y(t) = e^{a\cdot t+\tilde{c}} = e^{\tilde{c}}\cdot e^{at} = \boxed{c\cdot e^{at} = y(t)} \quad (c \in \mathbb{R}^*)$$

Was ist mit $y' = a\cdot y + h(x)$ ? I

~~Fakt~~ Die allg. Lös von I hat dieForm

eine spezielle Lös von I $(y_p)$

plus die allgem. Lös. von $y' = ay$. $(y_h)$

Das zweite Können wir, s.o.

Zum ersten: Mogeln: Fasse die Konst. C von oben als Funktion in t auf; $c(t)$:

setze in I ein: $\underset{\displaystyle ay + h(t)}{\overset{\|}{y'}} = c'(t)\cdot e^{at} + \underbrace{c(t)\cdot a\cdot e^{at}}_{= a\cdot y}$

$$\Rightarrow c'(t)\,e^{at} = h(t) \Rightarrow c(t) = \int e^{-at}\,h(t)\,dt.$$

$$\boxed{\text{Eine Lös. von I ist } \int e^{-at}h(t)\,dt \cdot e^{at}}$$

Die allg. Lös. von I ist $c\cdot y_h(t) + y_p(t)$; $c \in \mathbb{R}$;

mit $y_h(t) = e^{at}$; $y_p(x) = \int e^{-at}h(t)\,dt \cdot e^{at}$

bzw. $e^{at}\left(C + \int e^{-at}h(t)\,dt\right)$; $C \in \mathbb{R}$.

## 2.2 DGl n-ter Ordnung

hier nur „homogene lineare DGl mit Konstanten Koeffiz."

d.h. $\underbrace{y^{(n)}}_{\text{n-te Ableitung}} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$ ⊛

Die allg. Lös. sieht hier immer so aus:

$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t) \quad (c_i \in \mathbb{R})$

• Die $f_1, f_2, \ldots f_n$ heißen Fundamentalsystem

**Rezept:** (Prinzip: Nullst. eines zugeh. Polynoms bestimmen, Lös. in Tabelle nachgucken)

1. Stelle zu ⊛ das charakterist. Polynom $p(x)$ auf: $p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

2. Bestimme Nullstellen $\lambda$ von $p(x)$

3.

| | $f_i(x)$ |
|---|---|
| a) $\mathbb{R} \ni \lambda$ einfache Nullstelle | $e^{\lambda x}$ |
| b) $\lambda \in \mathbb{R}$ K-fache Nullstelle | $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots x^{K-1} e^{\lambda x}$ |
| c) $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}, \bar{\lambda} = a - bi$ (einfache Nullst.) | $e^{ax} \sin(bx); \; e^{ax} \cos(bx)$ |
| d) $\lambda = a + bi, \bar{\lambda} = a - bi$ K-fache Nullstelle | $e^{ax} \sin bx, x e^{ax} \sin bx, \ldots, x^{K-1} e^{ax} \sin bx$ <br> $e^{ax} \cos bx, x e^{ax} \cos bx, \ldots, x^{K-1} e^{ax} \cos bx$ |

<u>Bsp:</u> $y^{(6)} + 2y^{(4)} - 8y''' + 5y'' = 0$

Aufgabe kann lauten: a) Bestimmen Sie die allg. Lös.

oder b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem.

<u>1.</u> $p(x) = x^6 + 2x^4 - 8x^3 + 5x^2$ [Grad 6, also 6 Elem.]

<u>2.</u> <u>Nullstellen:</u> • 0 ist doppelte Nullstelle

$$p(x) = (x-0)^2 \cdot (x^4 + 2x^2 - 8x + 5)$$

• Raten: 1 ✓

$$(x^4 + 2x^2 - 8x + 5) : (x-1) = x^3 + x^2 + 3x - 5$$

$$\begin{array}{l} -(x^4 - x^3) \\ \hline x^3 + 2x^2 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline 3x^2 - 8x \\ -(3x^2 - 3x) \\ \hline -5x + 5 \\ -(-5x+5) \\ \hline 0 \end{array}$$

• Raten: 1 ✓

$$(x^3 + x^2 + 3x - 5) : (x-1) = x^2 + 2x + 5$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - x^2) \\ \hline 2x^2 + 3x \\ -(2x^2 - 2x) \\ \hline 5x - 5 \\ -(5x - 5) \\ \hline 0 \end{array}$$

also 1 auch doppelte Nullstelle.

$$p(x) = (x-0)^2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x^2 + 2x + 5)$$

~~p-q-Fo~~: $-\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i$

[ein Paar komplexer Nullst.]

3. Tabelle: • für 0: $f_1(x) = e^{0\cdot x} = 1$

$f_2(x) = x \cdot e^{0\cdot x} = x$

• für 1: $f_3(x) = e^x$ ; $f_4(x) = x \cdot e^x$

• für $-1 \pm 2i$: $f_5(x) = e^{-x} \cdot \sin 2x$, $f_6(x) = e^{-x} \cos 2x$

Antwort zu b): [$f_1$–$f_6$ hinschreiben, also:]

$1, x, e^x, x\cdot e^x, e^{-x}\cdot \sin 2x, e^{-x}\cdot\cos 2x$.

zu a): $c_1 + c_2 \cdot x + c_3 e^x + c_4 \cdot x \cdot e^x + c_5 \cdot e^{-x} \cdot \sin 2x + c_6 \cdot e^{-x} \cdot \cos 2x$ $(c_i \in \mathbb{R})$

Aufg.: (alle Teil 3, S. 48/49 außer i; k)

a) $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$

b) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$

c) $y''' - 4y'' + 3y' = 0$

d) $y''' - 3y'' = 0$

e) $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$

f) $y''' + y' = 0$

g) $y''' - 3y'' + y' + 5y = 0$

h) $y^{(4)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0$

*i) $y'' + y' + (1+i)y = 0$

*j) $y''' + (-1-2i)y'' + (1+3i)y' + (2-2i)y = 0$

*k) $y''' + y'' + (2i-1)y' - (1+2i)y = 0$

Bemerk.: i, j, k in $\mathbb{C}$ lösen. Einfacher: nur Fälle a) b) in Tabelle nehmen, mit $\lambda \in \mathbb{C}$

## 2.3 Systeme von DGl

bisher: gesucht $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

jetzt: gesucht $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$

<u>DGl-system</u> (homogen mit Konst. Koeff.):

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + \cdots + a_{1n} y_n \\ y_2' &= a_{21} y_1 + \cdots + a_{2n} y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1} y_1 + \cdots + a_{nn} y_n \end{aligned}$$

Kann ich mit Matrizen & Vektoren schreiben:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw} \quad y' = A y \quad (*)$$

<u>Rezept:</u> <u>Grundregel:</u> Ist $\lambda$ Eigenwert von $A$ und $v$ zugehöriger Eigenvektor, so ist $y(t) = e^{\lambda t} v$ eine Lösung von $(*)$

Für viele (kleine) Fälle reicht das bereits, d.h., liefert bereits ein Fundamentalsystem.

<u>Bsp:</u> Bestimmen Sie die allg. Lös. von $y' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y$

- Eigenwerte: $\det \begin{pmatrix} 4-x & 5 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 - 4x - 5 \rightsquigarrow x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2 - (-5)} = 2 \pm \sqrt{9} = \begin{cases} -1 \\ 5 \end{cases}$
- EV zu $-1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = -v_2$: z.B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- EV zu $5$: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & \\ 1 & -5 & \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = 5 v_2$: z.B. $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Allg. Lös:** $c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{5t}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} \quad (c_i \in \mathbb{R})$

**Probe:** $\begin{pmatrix}(-c_1e^{-t}+5c_2e^{5t})'\\(c_1e^{-t}+c_2e^{5t})'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-c_1e^{-t}+5c_2e^{5t}\\c_1e^{-t}+c_2e^{5t}\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}c_1e^{-t}+25c_2e^{5t}\\-c_1e^{-t}+5c_2e^{5t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4c_1e^{-t}+20c_2e^{5t}+5c_1e^{-t}+5c_2e^{5t}\\-c_1e^{-t}+5c_2e^{5t}\end{pmatrix}$$

Stimmt!

Fundamentalsystem hier: $e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix};\ e^{5t}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

Es können zwei Probleme auftreten:

1. Komplexe Nullstellen.
2. Nicht genug lin. unabh. Eigvektoren zum K-fachen Eigenwert $\lambda$.

**Aufg.**

a) $\begin{pmatrix}0 & 1\\-2 & 3\end{pmatrix}y = y'$

b) $y' = \begin{pmatrix}0 & -1\\-2 & 2\end{pmatrix}y$

c) $y' = \begin{pmatrix}-1 & -2\\1 & 2\end{pmatrix}y$

d) $y' = \begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}y$

e) $y' = \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}y$

## AWP

a0) $y' = yt \; ; \; y(0) = 2$ $\qquad [\, 2e^{\frac{1}{2}t^2} \,]$

a1) $y' = \frac{y}{t} \; ; \; y(1) = 2$ $\qquad [\, 2t \,]$

a2) $y' = \frac{-t}{y} \; , \; y(0) = 1$ $\qquad [\, \sqrt{-t^2+1} \,]$

f) $y' = \frac{y}{t^2} \; ; \; y(-1) = 1$

g) $y' = y \sin(t) \; ; \; y(0) = 1$