Dr. D. Frettlöh 13.11.2009

Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden der Biowissenschaften III
Fourieranalysis und ausgewählte Kapitel der Stochastik

Blatt 5

Aufgabe 16:
Zeigen Sie die Orthogonalitätsaussage von Satz 4.15: $f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$ ist orthogonal zu e_j für $1 \leq j \leq n$. Dabei ist, wie üblich, $e_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, $e_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\frac{k-1}{2} \cdot)$ für k ungerade, $e_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\frac{k}{2} \cdot)$ für k gerade.

Aufgabe 17:
Es gilt die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$. Beweisen Sie

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Aufgabe 18:
Zeigen sie, dass die ersten drei Hermite-Funktionen jeweils orthogonal zueinander sind bzgl $\langle f, g \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$. Dazu können die konstanten Vorfaktoren ignoriert werden, es reicht also, das für die folgenden drei Funktionen nachzuweisen:

$$\tilde{H}_0(x) = e^{-x^2/2}, \quad \tilde{H}_1(x) = 2xe^{-x^2/2}, \quad \tilde{H}_2(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2/2}$$

Dabei dürfen Sie benutzen: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ (siehe Math. Meth. f. Bioinf. II: W-theorie und Statistik).

Aufgabe 19:
Beweisen Sie folgende Aussage für Innenprodukträume (also $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$):

$$\|h - f\|^2 + \|h - g\|^2 = \frac{1}{2}\|f - g\|^2 + 2\|h - \frac{f+g}{2}\|^2$$

Abgabetermin: Freitag, 20.11.2009, in der Vorlesung