Lösungen zur Klausur
Vertiefung Mathematik I für NWI

Aufgabe 1, Lösung: Alles was hier gefragt war, war eine *Probe* durchzuführen:

i) $u : [1, \infty[\to \mathbb{R},\ u(t) = \cos(\frac{1}{t})$ einsetzen:
Links: $u'(t) = \frac{-1}{t^2}(-\sin(1/t))$, rechts: $\frac{1}{t^2}\sqrt{1-\cos(1/t)^2} = \frac{1}{t^2}\sqrt{\sin(1/t)^2} = \frac{1}{t^2}\sin(1/t)$, also gleich $u'(t)$. Also erfüllt dieses u die DGL.

ii) $u : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ u(t) = (\sin(t))^2$ einsetzen: $u'(t) = 2\sin(t)\cos(t)$, rechts: $2\cos(t)\sqrt{(\sin(t))^2} = 2\cos(t)\sin(t)$.
AWP: Einsetzen: $u(0) = (\sin(0))^2 = 0^2 = 0$. Stimmt.

Aufgabe 2, Lösung:

(a) Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned} \int u\,du = \int e^t dt \quad &\Rightarrow \\ \frac{1}{2}u^2 = e^t + C \quad &\Rightarrow \\ u(t) = \pm\sqrt{2e^t + C}. \end{aligned}$$

(b) Nach u' Umstellen ergibt: $u' = \frac{-t}{t^2+1} \cdot u$. Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{-t}{t^2+1}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = -\frac{1}{2}\ln|t^2+1| + C \quad &\Rightarrow \\ \ln|u| = -\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C \quad &\Rightarrow \\ u(t) = \pm\exp(-\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C) = e^C \cdot (t^2+1)^{-1/2} = \tilde{C}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}. \end{aligned}$$

(Mittels Formel für homogene lineare DGL geht's auch).

(c) Nach u' Umstellen ergibt: $u' = \frac{t^2-1}{t} \cdot u + 1 = (t - \frac{1}{t}) \cdot u + 1$. Das ist eine inhomogene lineare DGL.
Als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $u' = (t - \frac{1}{t}) \cdot u$ ergibt sich (mit der Formel):

$$u_h(t) = C\exp(\int t - \frac{1}{t}\,dt) = Ce^{\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-\ln|t|} = C\frac{1}{|t|}e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Eine spezielle Lösung u_s der inhomogenen Gleichung (mit der Formel): Mit $A(t) = \frac{1}{|t|}e^{\frac{t^2}{2}}$ ist

$$u_s(t) = A(t)\int \frac{1}{A(t)}\,dt = \frac{1}{|t|}e^{\frac{t^2}{2}}\int te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{|t|}e^{\frac{t^2}{2}}(-\int -te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt) = -\frac{1}{|t|}e^{\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}} = -\frac{1}{|t|}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$u(t) = -\frac{1}{|t|} + C\frac{1}{|t|}e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Aufgabe 3, Lösung: Lipschitzbedingung testen: Dazu muss man das Intervall für die u einschränken. Gesucht ist eine lokale Lösung um $u_0 = 1$, also sei z.B. $u \in [0,2] (= Q_b$ mit $b = 1)$. Nun entweder zu Fuß:

$$||f(t,u)-f(t,v)|| = |f(t,u)-f(t,v)| = |t^2u^2-t^2v^2| = |t^2|\cdot|u^2-v^2| \leq a^2|u+v|\cdot|u-v| \leq a^2 4|u-v|,$$

also mit $L := 4a^2$: $|f(t,u) - f(t,v)| \leq L|u-v|$. Ausserdem ist f als Polynom in t und u stetig. Fertig.

(Noch einfacher geht's mit Lemma 6.2: Statt der Lipschitzbedingung zeigt man, dass die Ableitung von f nach u, also $2t^2u$, auf einem geeigneten Intervall beschränkt ist.)

Aufgabe 4, Lösung: Immer ist $u_0 = 1,\ t_0 = 1,\ f(t,u) = \frac{-u}{t}$.

(a) $u_1 = 1 + 1 \cdot \frac{-1}{1} = 1 - 1 = 0$.

(b) $u_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
$u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1/2}{3/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

(c) $u_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-u_1}{3/2} \Rightarrow u_1 = 1 - \frac{1}{3}u_1 \Rightarrow u_1 = \frac{3}{4}$.
$u_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-u_2}{2} \Rightarrow u_2 = \frac{3}{4} - \frac{u_2}{4} \Rightarrow u_2 = \frac{3}{5}$.

Exakte Lösung durch Trennung der Veränderlichen (oder auch Formel für lineare homogene DGL): $u(t) = \frac{1}{t}$. Der exakte Wert ist also $u(2) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 5, Lösung: Die DGL lösen durch Trennung der Veränderlichen: Für $\alpha \neq -1$:

$$\int \frac{1}{u} du = \int t^\alpha dt \Rightarrow \ln|u| = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Rightarrow |u| = e^{\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}} \Rightarrow u(t) = \pm e^{\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}}.$$

Analog folgt für $\alpha = -1$: $\ln|u| = \ln|t| \Rightarrow u(t) = \pm t$. Diese Lösung tut's schon mal: $\lim\limits_{t\to 0} t = 0$.

Nun geht $e^{\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$ genau dann gegen 0, wenn der Exponent gegen $-\infty$ strebt. Da laut Aufgabenstellung $t > 0$ gilt, muss $\alpha + 1$ negativ sein (sonst bekommt man kein Minus), also folgt $\alpha < -1$.

Ferner muss $\lim_{t\to 0} t^{\alpha+1} = \infty$ gelten. Das ist aber für $\alpha + 1 < 0$ stets der Fall: $t^{\alpha+1} = \frac{1}{t^{-\alpha-1}}$, der Nenner geht gegen 0 (da der Exponent positiv ist), also der Bruch gegen $+\infty$.

Antwort: Für alle $\alpha \leq -1$.

Aufgabe 6, Lösung: Charakteristisches Polynom ablesen: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$. Eine Nullstelle ist leicht zu raten, nämlich 1 (denn $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 4 = 0$). Diese Abspalten (Polynomdivision):

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

Somit sind wir im Fall einer einfachen und einer doppelten reellen Nullstelle. Fundamentalsystem daher: $\{e^t, e^{2t}, te^{2t}\}$. Eine allgemeine Lösung sieht also so aus: $u(t) = Ae^t + Be^{2t} + Cte^{2t}$. Diese Ableiten, um die Anfangswertbedingung zu erfüllen: $u'(t) = Ae^t + 2Be^{2t} + Ce^{2t} + 2Cte^{2t}$, und $u''(t) = Ae^t + 4Be^{2t} + 4Ce^{2t} + 4Cte^{2t}$. Damit folgt aus der AWbedingung ($t = 0$ einsetzen):

$$\begin{array}{llll} A & +B & & = 1 \\ A & +2B & +C & = 2 \\ A & +4B & +4C & = 1 \end{array}$$

Lösen ergibt: $A = -3, B = 4, C = -3$. Lösung des AWP: $-3e^t + 4e^{2t} - 3te^{2t}$.

Aufgabe 7, Lösung Die zugehörige Matrix ist $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Die Eigenwerte bestimmen: Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$(2-x)^2(3-x)-(3-x) = (4-4x+x^2-1)(3-x) = (3-4x+x^2)(3-x) = (1-x)(3-x)(3-x).$$

Nun zu den Eigenwerten $1, 3$ und 3 zugehörige Eigenvektoren bestimmen (Lösen der linearen Gleichungssysteme $(A-I)v = 0$ und $(A-3I)v = 0$): Eigenvektor zu 1 ist z.B.: $(-1, 1, 0)$, Eigenvektoren zu 3 sind z.B.: $(1, 1, 0), (-3, 0, 1)$. Das ist gut: Ein Fundamentalsytem zu $v' = C^{-1}ACv$ (wobei $C = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ die Matrix ist, deren Spalten die EV sind) ist dann: $\{\left(\begin{smallmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{3t} \end{smallmatrix}\right)\}$.

Weiter ist $u = Cv$ eine Lösung von $u' = Au$. Ein Fundamentalsystem dazu ist also $\{\left(\begin{smallmatrix} -e^t \\ e^t \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -3e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{smallmatrix}\right)\}$.

Eine Lösung der Form $e^{3t}\boldsymbol{a} = e^{3t}\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right)$ darf nur die beiden letzten Komponenten des Fundamentalsystems enthalten (denn e^t darf nicht vorkommen). Also $u(t) = \alpha e^{3t}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \beta e^{3t}\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Damit ist $\boldsymbol{a}$ von der Form $\alpha\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \beta\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 8, Lösung: Das ist eine inhomogene lineare DGL. Die Lösung der homogenen ist (Trennung der Veränderlichen):

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{\alpha}{t}\,dt \quad \Rightarrow \ln|u| = \alpha \ln t + C \quad \Rightarrow u(t) = \pm e^{\alpha \ln t + C} = e^C \cdot (e^{\ln t})^\alpha = \tilde{C}t^\alpha.$$

Eine spezielle Lösung u_s der inhomogenen DGL: Mit $A(t) = t^\alpha$ ist (Formel): Falls $\alpha \neq 1$:

$$u_s(t) = t^\alpha \int \frac{\alpha - 1}{t^\alpha}\,dt = t^\alpha(\alpha - 1)\frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{t^{\alpha-1}} = t.$$

Falls $\alpha = 1$: $u_s(t) = t^\alpha \cdot 1 = t$.

Die allgemeine Lösung ist somit $t + Ct^\alpha$. Das ist ein Polynom genau dann, wenn α eine ganze nichtnegative Zahl ist.