

Dies ist nicht die...

Klausur Vertiefung Mathematik I für NWI

Aufgabe 1: (2 Punkte) Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $u' = \left(\frac{t+1}{u}\right)^2$

(b) $u' = u^2(t+1)^2$

Aufgabe 2: (4 Punkte) Bestimmen Sie jeweils die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $u' = \frac{\sin(t)}{\cos(u)}$, $u(0) = 0$,

(b) $u' = 2tu + t$, $u(1) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3: (5 Punkte) Gegeben ist eine stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $u_0 \in \mathbb{R}$, sowie das Anfangswertproblem

$$u' = f(t)u, \quad u(t_0) = u_0.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion u , $u(t) = u_0 \exp\left(\int_{t_0}^t f(s)ds\right)$ Lösung des AWP ist.

Aufgabe 4: (6 Punkte) Gegeben ist das Anfangswertproblem $u' = \frac{u}{1-t}$, $u(0) = 1$. Konstruieren Sie mit dem Eulerverfahren $u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$ eine Näherung für den Wert der Lösung bei $\frac{1}{2}$, jeweils für die Schrittweiten $h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{4}$, $h = \frac{1}{8}$. Wie sieht wohl die Näherung für $h = \frac{1}{2^k}$ aus? Was ist der exakte Wert?

Aufgabe 5: (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Gleichgewichte der Differentialgleichung

$$u' = (u^2 - 3u + 2)e^{-u}$$

und berechnen Sie, ob diese anziehend oder abstoßend sind.

Aufgabe 6: (8 Punkte) Bestimmen Sie jeweils die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme

(a) $u'' = u + (1+t)^2$, $u(0) = 3$, $u'(0) = 2$,

(b) $u''' = 4u - 3u''$, $u(0) = u'(0) = u''(0) = 1$.

Aufgabe 7: (5 Punkte) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des folgenden Systems linearer Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} u' &= u - 2v \\ v' &= 2u - w \\ w' &= 4u - 2v - w \end{aligned}$$

Aufgabe 8: (5 Punkte) Es sei $X(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Für welche Differentialgleichung ist das eine zugehörige Wronskimatrix?