Lösungen zur Probeklausur vom 4.7.

Wer 18 Punkte hat, hat locker 'bestanden'.

Aufgabe 1: *(1+1)* Beidesmal Trennung der Veränderlichen:
(a) $u(t) = (t^3 + 3t^2 + 3t + C)^{\frac{1}{3}}$ (es reichen die reellen Lösungen),
(b) $u(t) = \frac{-3}{t^3+3t^2+3t+C}$.

Aufgabe 2: *(2+2)*
(a) Trennung der Veränderlichen: $\int_0^u \cos(u)du = \int_0^t \sin(t)dt$, also $\sin(u) = -\cos(t) + \cos(0)$, also $u(t) = \arcsin(-\cos(t) + 1)$.
(b) Lineare inhomogene DGl: Entweder so:
1. Allg. Lösung der homogenen: $u(t) = C \exp(\int 2tdt) = Ce^{t^2}$.
2. Eine Lösung der inhomogenen, durch Variation der Konstanten: Ansatz $u_s(t) = c(t)u(t) = c(t)e^{t^2}$. Dann $u_s'(t) = c'(t)e^{t^2} + c(t)2te^{t^2} \stackrel{!}{=} 2tc(t)e^{t^2} + t$, also $c'(t) = te^{-t^2}$, $c(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ und $u_s(t) = -\frac{1}{2}$. Allgemeine Lösung der inhomogenen: $-\frac{1}{2} + Ce^{t^2}$. (Alternativ: direkt mit der Formel aus Satz 9.3 der Vorlesung.)
AWP: $u(1) = -\frac{1}{2} + Ce^1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$, also $C = e^{-1}$.

Aufgabe 3: *(5)* Es ist $u'(t) = u_0 f(t) \exp(\int_{t_0}^t f(s)ds) = f(t)u(t)$, also ist u Lösung der DGl. Es ist $u(t_0) = u_0 \exp(\int_{t_0}^{t_0} f(s)ds) = u_0 e^0 = u_0$, also ist u Lösung des AWP.

Aufgabe 4: *(3+1+2)*
$h = \frac{1}{2}: \ u_1 = \mathbf{\frac{3}{2}}$.
$h = \frac{1}{4}: \ u_1 = \frac{5}{4}, u_2 = \mathbf{\frac{5}{3}}$.
$h = \frac{1}{8}: \ u_1 = \frac{9}{8}, u_2 = \frac{9}{7}, u_3 = \frac{9}{6}, u_4 = \mathbf{\frac{9}{5}}$.

Nun kann man raten $h = \frac{1}{16}: \ u_1 = \frac{17}{16}, u_2 = \frac{17}{15}, u_3 = \frac{17}{14}, \dots u_8 = \mathbf{\frac{17}{9}}$. Also wohl $h = \frac{1}{2^n}: \ \frac{2^n+1}{2^{n-1}+1}$. (Kann man auch beweisen, das ist hier aber nicht gefragt.)

Der exakte Wert: Lösung des AWP: $\int_1^u \frac{1}{u}du = \int_0^t \frac{1}{1-s}ds$, also $\ln(u) - 0 = -\ln|1-t| - 0 = \ln(\frac{1}{|1-t|})$, also $u(t) = \frac{1}{|1-t|}$ und $u(\frac{1}{2}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Aufgabe 5: *(2+2)* Die Gleichgewichte sind die Nullstellen von $u' = f(u)$, also hier: Nullstellen von $(u^2 - 3u + 2)e^{-u}$. Der zweite Faktor e^{-u} ist nie 0, der erste bei $u_1 = 1$, $u_2 = 2$.
Falls $f'(u_i) > 0$, so ist u_i abstoßend, falls $f(u_i) < 0$, so ist u_i anziehend. $f'(u) = (-u^2 + 5u - 5)e^{-u}$, einsetzen ergibt $f'(1) < 0$ (anziehend), $f'(2) > 0$ (abstoßend).

Aufgabe 6: *(4+4)*
(a) Charakterist. Polynom der homogenen DGl: x^2-1, also Fundamentalsystem $u_1(t) = e^t, u_2(t) = e^{-t}$.
Mit Formel (Bemerkung nach Satz 18.3 der Vorlesung): eine spezielle Lösung der inhomogenen ist

$$u_s(t) = -u_1(t) \int \frac{u_2(t)b(t)}{w(t)} dt + u_2(t) \int \frac{u_1(t)b(t)}{w(t)} dt,$$

wobei $w(t) = u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t)$, also hier $w(t) = -2$. Somit

$$u_s(t) = -e^t \frac{-1}{2} \int (1+t)^2 e^{-t} dt + e^{-t} \frac{-1}{2} \int (1+t)^2 e^t dt = -t^2 - 2t - 3.$$

[**OK**, die Integrale sind schwierig, so welche kommen in der Klausur nicht.]
Allgemeine Lösung der inhomogenen DGl: $u(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t^2 - 2t - 3$. Die AWbedingungen $u(0) = 3, u'(0) = 2$ ergeben:

$$C_1 + C_2 - 3 = 3, \quad C_1 - C_2 - 2 = 2,$$

also $C_1 = 5, C_2 = 1$. Ergebnis: $5e^t + e^{-t} - t^2 - 2t - 3$.

(b) Charakterist. Polynom: $x^3 + 3x - 4$, Nullstellen $1, -2, -2$. Allgemeine Lösung also $C_1 e^t + C_2 e^{-2t} + C_3 t e^{-2t}$. Aus der AWbedingung ergibt sich:

$$C_1 + C_2 = 1, \quad C_1 - 2C_2 + C_3 = 1, \quad C_1 + 4C_2 - 4C_3 = 1,$$

ausrechnen ergibt $C_1 = 1, C_2 = C_3 = 0$. Antwort: $u(t) = e^t$.

Aufgabe 7: *(5)* Eigenwerte der zugehörigen Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ sind $1, -\frac{1}{2} \pm \sqrt{7}i$. Fundamentalsystem also $(e^t, 0, 0)^T$, $(0, e^{-t/2}\sin(\sqrt{7}t), e^{-t/2}\cos(\sqrt{7}t))^T$, $(0, e^{-t/2}\cos(\sqrt{7}t), -e^{-t/2}\sin(\sqrt{7}t))^T\}$.

Aufgabe 8: *(5)* Als Antwort reicht: $u'' + u = 0$, denn $\cos(t), \sin(t)$ sind Lösungen (sogar ein Fundamentalsystem) dieser DGl, und in der 1. Zeile einer Wronskimatrix stehen Lösungen der zugehörigen DGl.

Wie kommt man drauf: Der Begriff Wronskimatrix taucht bei linearen DGl auf, in der ersten Zeile stehen Lösungen. Also: welche lineare DGl hat Lösungen $u_1(t) = \cos(t)$, $u_2(t) = \sin(t)$? Das kann man wissen. Oder herleiten: in der allgemeinen Form sind Lösungen einer lin. DGl etwa $e^{rt}\cos(st)$, $e^{rt}\sin(st)$, mit $r \pm si$ Nullstelle des charakterist. Polynoms. Hier also $r = 0, s = \pm 1$, Nullstellen also $\pm i$, dazu gehört das Polynom $x^2 + 1$, dazu gehört die DGl $u'' + u = 0$.