4. Umkehrsatz (bzw S.v.d. Umkehrabb.)

$y = f(x) = [\text{Term in } x]$ umformen zu $x = [\text{Term in } y] = f^{-1}(y)$

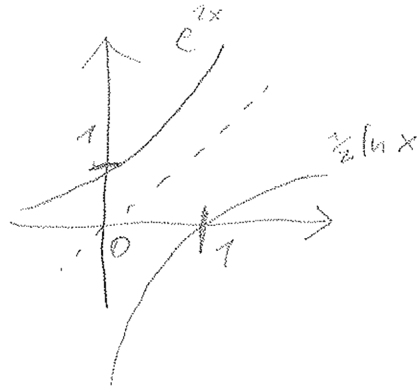
- f^{-1} heißt Umkehrabb. (inverse Funktion) von f.

Def: $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \supset E$.
f umkehrbar, falls es f^{-1} gibt
mit $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D$
$f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in E$

Bsp $\qquad y = f(x) = e^{2x}$

$(y > 0) \iff \ln y = 2x$

$\iff \frac{1}{2} \ln y = x = f^{-1}(y)$



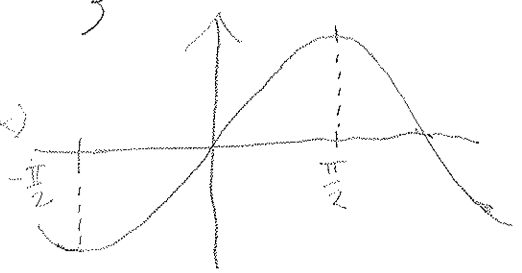
Immer: $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$

Hier: $f(f^{-1}(x)) = e^{2 \cdot \frac{1}{2} \ln x} = e^{\ln x} = x$.

$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2} \ln e^{2x} = \frac{1}{2} 2x = x$.

- Geht nicht immer: (evtl. muss man Def.-bereich verkleinern.)
- $f(x) = 2 \qquad f(f^{-1}(x)) = 2$
  immer, egal

- $f(x) = \sin(x)$



geht z.B. für $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Aber nicht bei $\frac{\pi}{2}$!

Für Funkt. mit mehreren Variablen brauchen wir:

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Ableitung (aka Jacobimatrix, Abl.-matrix)

ist $\quad D_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \cdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x} & \cdots & & \end{pmatrix}$

Bsp $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y-z \\ xy^2+y^2z \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \end{matrix}$

$$D_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & -1 \\ y^2 & 2xy+2yz & y^2 \end{pmatrix}$$

!

<u>Quizfrage</u> Wann ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ umkehrbar?

<u>Bemerk:</u> falls $m=1$, so ist $D_f = \operatorname{grad}_f$

Sonst ist $D_f = \begin{pmatrix} \text{---} \operatorname{grad} f_1 \text{---} \\ \text{---} \operatorname{grad} f_2 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \operatorname{grad} f_m \text{---} \end{pmatrix}$

<u>Antwort</u> (<u>Umkehrsatz</u>) Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.-bar bei $a \in \mathbb{R}^n$

f ist in einer Umgebung von a umkehrbar

$\Leftrightarrow$ $\det(D_f(a)) \neq 0$. • Dann ist $\underbrace{D_{(f^{-1})}}_{\text{Ableitung der Umkehrfn}} = (D_f)^{-1}$

inverse Fktn — inverse Matrix

<u>Bsp</u> $f(x) = \begin{pmatrix} x+y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}$; $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

f umkehrbar? $D_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$

$$\det(D_f(x,y)) = -2y - 2y \cdot 2x = -2y(1+2x) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \lor 1+2x = 0 \Rightarrow y=0 \lor x = -\tfrac{1}{2}$$

• f umkehrbar für $y \neq 0$ und $x \neq -\frac{1}{2}$

(wäre $f: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+^2$: also $x>0$, $y>0$: überall im Def.-bereich umkehrbar)

Weiter ist $\mathcal{D}_{f^{-1}} = (\mathcal{D}_f)^{-1}$: Matrix invertieren!

$$\begin{array}{cc|cc|l}
1 & 2y & 1 & 0 & 2x \\
2x & -2y & 0 & 1 & - \\
\hline
1 & 2y & 1 & 0 & 1+2x \\
0 & \underbrace{2y+2x2y}_{2y(1+2x)} & 2x & -1 & - \\
\hline
-(2x+1) & 0 & 2x-2x-1 & -1 & \mid : -(2x+1) \\
0 & 2y(1+2x) & 2x & -1 & \mid : (2x+1)2y \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{2x+1} & \frac{1}{2x+1} & \\
0 & 1 & \frac{2x}{2y(2x+1)} & \frac{-1}{2y(2x+1)} &
\end{array}$$

$(x \neq -\frac{1}{2}!)$

$(y \neq 0!)$

Also $\mathcal{D}_{f^{-1}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x+1} & \frac{1}{2x+1} \\ \frac{2x}{2y(2x+1)} & \frac{-1}{2y(2x+1)} \end{pmatrix}$

Aufg.: b) $f: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \end{pmatrix}$ (Furlan II S. 73)

(!)

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}y^2 \\ xy \end{pmatrix}$

$(x \neq y^2 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{|y|})$

$$\begin{array}{cc|cc}
1 & y & 1 & 0 \\
y & x & 0 & 1 \\
\hline
1 & y & 1 & 0 \\
0 & y^2-x & y & -1 \\
\hline
x-y^2 & 0 & y^2-y^2+x & -y \\
0 & 1 & \frac{y}{y^2-x} & \frac{-1}{y^2-x}
\end{array}$$

d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \cdot y \\ 2y \cdot x \end{pmatrix}$

(nirgends)

e) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \cdot e^y \\ e^{2y} \end{pmatrix}$

(überall)

$$\begin{array}{cc|cc|l}
e^y & xe^y & 1 & 0 & 2e^y \\
0 & 2e^{2y} & 0 & 1 & x \\
\hline
-2e^{2y} & 0 & -2e^y & x & \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}e^{-2y} & \\
\hline
 & & e^{-y} & -\frac{x}{2}e^{-2y} & \\
 & & 0 & \ldots &
\end{array}$$