Sei b_1, b_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und $v \in \mathbb{R}^2$.
Also gibt es $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $v = x_1 b_1 + x_2 b_2$

<u>Frage</u> Wie finden wir die x_1, x_2?
<u>Antwort</u>: Mit $B = \begin{pmatrix} | & | \\ b_1 & b_2 \\ | & | \end{pmatrix}$ (die Spalten von B sind b_1, b_2)

löse $Bx = v$.

<u>Bsp</u>: $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

A $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: Löse $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\underline{x_1 = -1, x_2 = 1}$

(Probe: $-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ✓)

B $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$: Löse $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\underline{x_1 = 2}, \underline{x_2 = \frac{1}{2}}$

Falls nun andere Basis: z.B. $b_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

analog (z.B. A: ... $x_1' = -2, x_2' = 1$)

<u>Ziel</u>: Gegeben v sowie zwei Basen b_1, b_2 & b_1', b_2', berechne aus x_1, x_2 direkt x_1', x_2'.

<u>Überlegung</u> $\boxed{1.}$ einfach, falls $b_1' = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2' = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\underbrace{B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{bekannt,}} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \leftarrow (= v) \text{ denn:}$$

<u>Bsp</u>: A $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x_1' = 1, x_2' = -1$

B $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x_1' = 3, x_2' = 2$

2. Wir suchen T, so dass $T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$.

(wobei je $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n = x_1' b_1' + \dots + x_n' b_n'$)

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ bzgl. } b_1, \dots, b_n \arrow[r, squiggly, "T"] \arrow[d, "B"] & \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ bzgl. } b_1', \dots, b_n' \arrow[d, "B'"] \\
\mathbb{R}^n \text{ bzgl. } e_1, \dots, e_n \arrow[r, squiggly, "E"] & \mathbb{R}^n \text{ bzgl. } e_1, \dots, e_n
\end{tikzcd}$$

Die Anwendung von T entspricht dem Umweg

$B - E - (B'$ rückwärts$)$.

Das ist in Matrixsprache: $\boxed{T = B'^{-1} E B = B'^{-1} B}$

Bsp: Hier $T = B'^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cc|cc}
0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

(A) $x_1 = -1,\ x_2 = 1$: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

(B) $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$?

$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ bingo!

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ 3x \end{pmatrix}$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\underset{\text{bzgl. } e_1, e_2}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "f"] & \underset{\text{bzgl. } e_1, e_2}{\mathbb{R}^2} \\
\underset{\text{bzgl. } b_1, b_2}{\mathbb{R}^2} \arrow[u, "B"] \arrow[r, "T_f"'] & \underset{\text{bzgl. } b_1', b_2'}{\mathbb{R}^2} \arrow[u, "B'"']
\end{tikzcd}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f(v) = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bzgl. $\{b_1, b_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$: $\quad v = \underline{\underline{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{\underline{(-1)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

bzgl. $\{b_1', b_2'\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad f(v) = \underbrace{x_1'}_{?} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{x_2'}_{?} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Das können wir nun auch! Statt T_f gehe so:

$B - f - (B'$ rückwärts); in Matrixsprache:

$$\boxed{T_f = B'^{-1} A_f B}$$