Blatt 2 Aufgabe 8 (Vertausche und und oder)

Seien F und G zwei Formeln mit $F \equiv G$.

Dabei sollen weder F noch G die Zeichen $\Leftrightarrow$ oder $\Rightarrow$ enthalten.

Sei $\hat{F}$ (bzw. $\hat{G}$) die Formel, die aus F (bzw. G) entsteht, wenn man alle $\vee$ in $\wedge$ verwandelt und alle $\wedge$ in $\vee$. (In der ursprünglichen Aufgabenstellung waren das F' und G'.)

Zeigen Sie, dass auch $\hat{F} \equiv \hat{G}$ gilt.

Erstmal ein Beispiel

Angenommen F und G sind in konjunktiver Normalform:

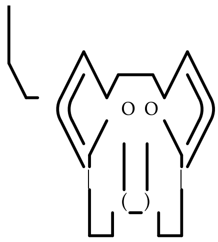
$$F = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right) \qquad \text{und} \qquad G = \bigwedge_{i=1}^{n'} \left(\bigvee_{j=1}^{m'_i} L'_{i,j} \right)$$

Dann sehen $\hat{F}$ und $\hat{G}$ so aus:

$$\hat{F} = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right) \qquad \text{und} \qquad \hat{G} = \bigvee_{i=1}^{n'} \left(\bigwedge_{j=1}^{m'_i} L'_{i,j} \right)$$

Nicht durchschieben

Um zu sehen, dass $\hat{F}$ und $\hat{G}$ jetzt wieder äquivalent sind, können wir einfach ein $\neg$ mit den (verallgemeinerten) de Morganschen Regeln "durchschieben". Dann sehen die Formeln wieder fast gleich aus.



$$\neg\hat{F} = \neg \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} \neg L_{i,j} \right) =: F'$$

und

$$\neg\hat{G} = \neg \bigvee_{i=1}^{n'} \left(\bigwedge_{j=1}^{m'_i} L'_{i,j} \right) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n'} \left(\bigvee_{j=1}^{m'_i} \neg L'_{i,j} \right) =: G'$$

Alle Atomaren Formeln negiert

Da ein Literal nur aus einer atomaren Formel oder der Negation einer atomaren Formel besteht, ist F' (bzw. G') genau die Formel, die aus F (bzw. G) entsteht, wenn man alle atomaren Formeln negiert!

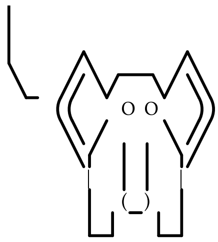
Wie in Aufgabe 3 gilt wieder $\mathcal{A}(F') = \mathcal{A}'(F)$ und $\mathcal{A}(G') = \mathcal{A}'(G)$ (für eine beliebige Belegung $\mathcal{A}$ und die negierte Belegung $\mathcal{A}'$).

Für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt also: $\mathcal{A}\left(\neg\hat{F}\right) = \mathcal{A}(F') = \mathcal{A}'(F) = \mathcal{A}'(G) = \mathcal{A}(G') = \mathcal{A}\left(\neg\hat{G}\right)$
Daraus folgt: $\neg\hat{F} \equiv \neg\hat{G}$ bzw. $\hat{F} \equiv \hat{G}$

Wir haben also für dieses Beispiel $\mathcal{A}\left(\neg\hat{F}\right) = \mathcal{A}'(F)$ (mit dem Zwischenschritt $\mathcal{A}\left(\neg\hat{F}\right) = \mathcal{A}(F')$ und $\mathcal{A}(F') = \mathcal{A}'(F)$) geizeigt (und analog für G) und daraus $\hat{F} \equiv \hat{G}$ gefolgert.

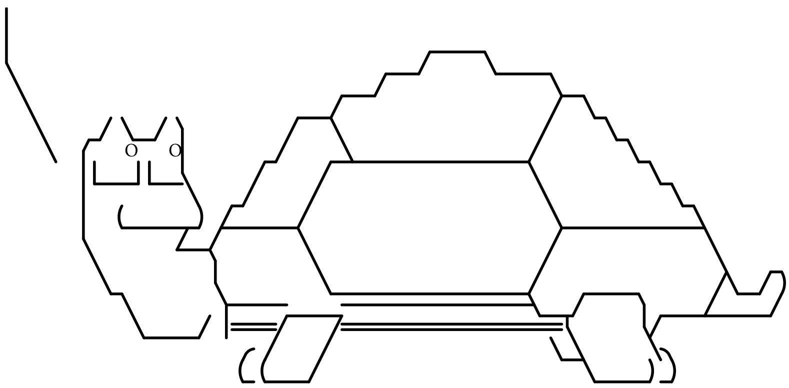
Aber gilt für jede Formel F: $\mathcal{A}\left(\neg\hat{F}\right) = \mathcal{A}'(F)$?

Und falls ja, wie kann man das formal beweisen?



Ja!

Ja, das gilt allgemein und das kann man mit struktureller Induktion (und ganz ohne Zwischenschritte oder Aufgabe 3) zeigen.



Der Beweis

Notationen für diese Aufgabe

Im Folgenden soll der Hut (Zirkumflex) $\hat{\circ}$ immer bedeuten, dass $\wedge$ und $\vee$ überall getauscht werden. Also auch wenn eine neue Formel H gegeben ist, soll $\widehat{H}$ wieder entsprechend aus H durch vertauschen von $\wedge$ und $\vee$ entstehen.

Außerdem soll für eine gegebene Belegung $\mathcal{A}$ die Belegung $\mathcal{A}'$ die entsprechende negierte Belegung sein. Also für jede atomare Formel A_i soll $\mathcal{A}'(A_i) = 1 - \mathcal{A}(A_i)$ gelten.

Wir beweisen die Aussage in zwei Schritten:

I) Zeige: Für eine beliebige Formel F und jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}'(F) = \mathcal{A}\left(\neg\hat{F}\right)$
II) Benutze I) um für beliebige Formeln F und G die Aussage (wenn $F \equiv G$ gilt, dann $\hat{F} \equiv \hat{G}$) zu zeigen.

Wir starten mit dem zweiten Teil und zeigen dann den komplizierteren ersten Teil.

II) Benutze I) um die Aussage zu zeigen
Wir nehmen zuerst an, dass $F \equiv G$ gilt.

Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung.

z.z.: $\mathcal{A}\left(\hat{F}\right) = \mathcal{A}\left(\hat{G}\right)$

Bew.:

Da $F \equiv G$ gilt, gilt natürlich $\mathcal{A}'(F) = \mathcal{A}'(G)$.

Mit I) folgt dann: $\mathcal{A}\left(\neg\hat{F}\right) = \mathcal{A}'(F) = \mathcal{A}'(G) = \mathcal{A}\left(\neg\hat{G}\right)$

Also $1 - \mathcal{A}\left(\hat{F}\right) = \mathcal{A}\left(\neg\hat{F}\right) = \mathcal{A}\left(\neg\hat{G}\right) = 1 - \mathcal{A}\left(\hat{G}\right)$ und somit $\mathcal{A}\left(\hat{F}\right) = \mathcal{A}\left(\hat{G}\right)$.

■

I) $\mathcal{A}'(F) = \mathcal{A}\left(\neg\hat{F}\right)$
Wir beweisen das mit struktureller Induktion.

Im Folgenden sollen F, G und H wieder beliebige Formeln (und nicht unbedingt die aus der Aufgabe) sein.

IA: Angenommen F ist eine atomare Formel. Dann gilt natürlich $\hat{F} = F$.

Und somit:

$$\mathcal{A}\left(\neg\hat{F}\right) = \mathcal{A}(\neg F) = 1 - \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}'(F)$$

IV: Die Aussage gilt für alle kleineren Formeln als F.

IS:

1.Fall:	$F = \neg G$	(Hier gilt die Aussage nach der IV. für G.)
2.Fall:	$F = G \wedge H$	(Hier gilt die Aussage nach der IV. für G und H.)
3.Fall:	$F = G \vee H$	(Hier gilt die Aussage nach der IV. für G und H.)

1.Fall: $F = \neg G$

Es gilt $\hat{F} = \neg\hat{G}$ und $\mathcal{A}'(G) = \mathcal{A}\left(\neg\hat{G}\right)$ nach IV.

Somit gilt auch:

$$\mathcal{A}\left(\neg\hat{F}\right) = 1 - \mathcal{A}\left(\hat{F}\right) = 1 - \mathcal{A}\left(\neg\hat{G}\right) \overset{\text{IV}}{\widehat{=}} 1 - \mathcal{A}'(G) = \mathcal{A}'(\neg G) = \mathcal{A}'(F)$$

2.Fall: $F = G \wedge H$

Es gilt $\hat{F} = \hat{G} \vee \widehat{H}$ und $\mathcal{A}'(G) = \mathcal{A}\left(\neg\hat{G}\right)$ und $\mathcal{A}'(G) = \mathcal{A}\left(\neg\hat{G}\right)$ nach IV.

Somit gilt auch:

$$\mathcal{A}\left(\neg\hat{F}\right) = \mathcal{A}\left(\neg\left(\hat{G} \vee \widehat{H}\right)\right) \overset{\text{de Morgan}}{\widehat{=}} \mathcal{A}\left(\neg\hat{G} \wedge \neg\widehat{H}\right) = \min\left\{\mathcal{A}\left(\neg\hat{G}\right), \mathcal{A}\left(\neg\widehat{H}\right)\right\}$$

$$\overset{\text{IV}}{\widehat{=}} \min\{\mathcal{A}'(G), \mathcal{A}'(H)\} = \mathcal{A}'(G \wedge H) = \mathcal{A}'(F)$$

3.Fall: $F = G \vee H$ (Analog zu Fall 2)

Es gilt $\hat{F} = \hat{G} \wedge \widehat{H}$ und $\mathcal{A}'(G) = \mathcal{A}\left(\neg\hat{G}\right)$ und $\mathcal{A}'(G) = \mathcal{A}\left(\neg\hat{G}\right)$ nach IV.

Somit gilt auch:

$$\mathcal{A}\left(\neg\hat{F}\right) = \mathcal{A}\left(\neg\left(\hat{G} \wedge \widehat{H}\right)\right) \overset{\text{de Morgan}}{\widehat{=}} \mathcal{A}\left(\neg\hat{G} \vee \neg\widehat{H}\right) = \max\left\{\mathcal{A}\left(\neg\hat{G}\right), \mathcal{A}\left(\neg\widehat{H}\right)\right\}$$

$$\overset{\text{IV}}{\widehat{=}} \max\{\mathcal{A}'(G), \mathcal{A}'(H)\} = \mathcal{A}'(G \vee H) = \mathcal{A}'(F)$$

$\blacksquare$