Übungen zur Vorlesung Panorama der Mathematik und Informatik

Blatt 11

Aufgabe 31: (Vektoren falten)
Berechnen Sie für die Vektoren $f = (1,1,1,1,0,0,0,0)$ und $g = (1,0,1,0,0,0,0,0)$ deren Faltung; bzw genauer (und einfacher): Berechnen Sie $N \cdot (f * g)$ (siehe Folien vom 18.6. Seite 5).

Aufgabe 32: (DFT(1,2,3,4))
Berechnen Sie die Diskrete Fouriertransformation (DFT) von $(1,2,3,4)$, von $(1,1,1,1)$ und von $(1,0,0,0)$. Sie brauchen also die Matrix D mit

$$D = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \xi^{-1} & \xi^{-2} & \cdots & \xi^{-(N-1)} \\ 1 & \xi^{-2} & \xi^{-4} & \cdots & \xi^{-2(N-1)} \\ 1 & \xi^{-3} & \xi^{-6} & \cdots & \xi^{-3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi^{-(N-1)} & \xi^{-2(N-1)} & \cdots & \xi^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

für $N = 4$, wobei $\xi = e^{2\pi i/N}$.
Zusatz: Berechnen Sie D^2 und benutzen Sie Ihre daraus gewonnenen Erkenntnisse, um D^{-1} zu bestimmen (bzw. zu erraten).

Aufgabe 33: (Einheizwurzeln)
Eine n-te *komplexe Einheitswurzel* ($n \geq 1$) ist eine Lösung der Gleichung $x^n = 1$ in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. (Z.B. ist i eine vierte komplexe Einheitswurzel, denn $i^4 = (-1)^2 = 1$.)

Eine n-te Einheitswurzel modulo N ($n \geq 1$) ist eine Lösung der Gleichung $x^n = 1 \mod N$ in den Zahlen $\{0, 1, \ldots, N-1\}$, so dass $x^m \neq 1 \mod N$ für $m < n$. Der Schönhage-Strassen-Algorithmus zur schnellen Multiplikation arbeitet mit n-ten Einheitswurzel modulo N für $N = 2^k + 1$. Finden Sie die ersten, zweiten, dritten und vierten Einheitszwurzeln für $N = 5$ und analog die ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften, sechsten, siebten, achten Einheitswurzeln für $N = 9$.

Tipp: x heißt primitive n-te Einheitswurzel, falls $x^n = 1$ und $x^m \neq 1$ für $0 < m < n$. Sie können die Aufgabe auch für primitive Einheitswurzeln lösen, dann müssen Sie weniger schreiben.

Stellen Sie damit die Matrix für die IDFT in $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ (statt in $\mathbb{C}$) auf. (Vgl. Folien 18.6.)

Rätsel der Woche:
Finden Sie ein unendliches Wort (=String), der für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau $n+1$ verschiedene Worte (=Teil-Strings) der Länge n enthält.

Abgabe: Wie mit den Tutoren vereinbart, oder bis 25.6. um 12:00 Uhr in Postfach 2183 in V3