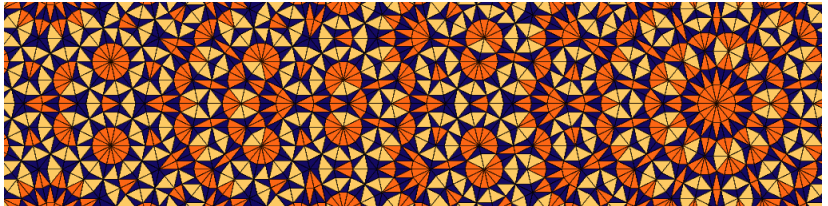


0: Übersicht, Organisatorisches / 1. Anfänge

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät

7.4.2015



Idee: Gesamtbild zeichnen. Dazu: Geschichte, Methoden, Meilensteine, Persönlichkeiten, aktuelle Forschung....

Plan:

- ▶ Geschichte: Antike, Mittelalter, Renaissance, Klassik, Moderne.
- ▶ Werk von Leibniz, Gödel, Turing, Knuth...
- ▶ Methoden: Im Laufe der Geschichte, heute
- ▶ Literatur, Publikationswesen, Recherche, L^AT_EX, wikipedia
- ▶ Meilensteine: ein paar ausgewählte Themen (google, jpeg, RSA, erzeugende Funktionen...)
- ▶ Aktuelle Forschungsthemen (auch) aus Bielefeld
- ▶ Mathe, Informatik und Kunst

(Disclaimer: alles meine persönliche Sicht)

Anrechnung: Strukturierte Ergänzung, oder individuelle Ergänzung.

10 Leistungspunkte gibt's für

- ▶ Übungen: 50% sinnvoll bearbeiten, aktiv an Übungen teilnehmen, Lösungen präsentieren **und**
- ▶ Prüfung: mündlich (20-30 min)

Übungen: alles ist erlaubt, google, wikipedia, brute-force Berechnungen,... Lösungen dürfen ergoogelt werden, sollen aber voll verstanden sein. Abgaben allein oder in Zweiergruppen.

Prüfung: Idealerweise ein kenntnisreicher Dialog über hier behandelte Themen (Vorlesung und Übung)

Prüfungsthemen: Folien, Verweise auf den Folien und Übungen, Videoaufzeichnung

Termine Tutorium.

Literatur:

- ▶ Hans Wußing: 6000 Jahre Mathematik (online über Unibib)
- ▶ Steven Levy: Hackers
- ▶ AK Dewdney: Computer-Kurzweil
- ▶ Andreas Loos, Günter M. Ziegler: Panorama der Mathematik (ab 2015)
- ▶ alles von Ian Stewart
- ▶ Wikipedia: deutsche und englische Seiten


1. Geschichte: Wie alles begann...

- ▶ Zählen: Notation für hohe Zahlen, Buchhaltung, Handel
- ▶ Geometrie: Messen, Bauen, Dekorieren
- ▶ Astronomie: Kalender, Ortsbestimmung

Ägypten:

Ganze Zahlen:

1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
	∩	☉	☐	☐	☐	☐
Einfacher Strich	Rinds-gespann	Sellschlinge	Wasserlilie	Finger	Kaulquappe oder Frosch	Heh (altägyptischer Gott der Unendlichkeit)

Also etwa $335 =$ 

Brüche: immer als $\frac{1}{n}$

Stammbrüche mit Zweierpotenzen

1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64



(Teile eines Auges:) Allgemeiner:

Allgemeine Stammbrüche

2/3	1/2	1/3	1/4	...	1/9	1/10	1/11	1/12	...
$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$...	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$...
			

Also z.B.

$$\frac{\overline{3}}{|||} \frac{\overline{2}}{||} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{\overline{9}}{\overline{999}} \frac{\overline{10}}{\overline{101}} = \frac{1}{331}$$



Ein Zeichen für “nichts”:

Zusf. (Wußing, “6000 Jahre Mathematik”)

“Mathematische Methoden entstehen aus praktischen Bedürfnissen: Landvermessung, Bau von Pyramiden, Tempeln, Speichern, Bewässerungsanlagen, Abrechnungen von Lohn, Material, Abgaben. Die Methoden wurden als Handlungsanweisungen [Algorithmen!] anhand konkreter Beispiele mit Proben von staatlichen Schreibern ohne Begründung oder Beweis beschrieben.”

Arithmetik: Addition und Subtraktion, Multiplikation durch sukzessive Verdopplung des Multiplikanden, Division durch Verdopplung des Divisors;

arithmetische Reihen: $a + (a + b) + (a + 2b) + \dots$,

endliche geometrische Reihen: $a + a^2 + a^3 + \dots$

Algebra: Lineare Gleichungen: $1\frac{1}{2} \cdot x + 4 = 10$,

rein quadratische Gleichungen: $x^2 = a$,

Näherungen für Quadratwurzeln.

Geometrie: Flächeninhalte von Rechteck, Dreieck und Trapez,

Näherung für die Kreisfläche gemäß $F = (8/9 \cdot d)^2$ mit

Durchmesser d ;

Volumina von Würfel, Quader und Zylinder,

korrekte Formel für den Inhalt eines Pyramidenstumpfes.

Ein paar erhaltene Papyrusschriften dienen als Quellen

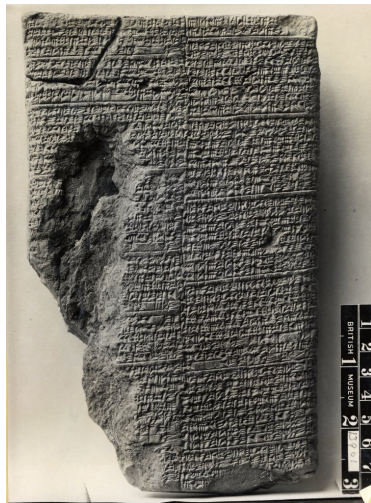
(“Rhind-Papyrus”)

PR:

- ▶ 6000 Jahre Mathematik: Kap. 3 Kästen S. 121 und 142
- ▶ wikipedia: ägyptische Zahlschrift

Mesopotamien: Algorithmen durch Beispiel

- ▶ Keilschrifttafel 13901 aus dem British Museum in London
- ▶ Ursprünglich 24 Probleme (einige zerstört)
- ▶ 2000 bis 1600 v. Chr.
- ▶ 11,7 cm × 19,4 cm



Tablet 13901, Problem 1

Ich habe die Fläche und eine Seite eines Quadrates addiert. $\frac{3}{4}$

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

Nimm die Einheit 1. Teile sie in zwei; $\frac{1}{2}$. Du multiplizierst $\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$. Du addierst $\frac{1}{4}$ zu $\frac{3}{4}$; 1. Das ist das Quadrat von 1. Du subtrahierst $\frac{1}{2}$, das du multipliziert hast, von 1; $\frac{1}{2}$, die Seite des Quadrates.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx = c \quad b \rightarrow \frac{b}{2} \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 \rightarrow c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \rightarrow \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \\ \rightarrow \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} \end{aligned}$$

Proclus Diadochus (411-485) schreibt,
Eudemus von Rhodos (350-290 v.Chr., Schüler von Aristoteles)
schreibe,

Thales von Milet (624-547 v.Chr.) habe folgendes gezeigt:

- ▶ Ein Kreis wird von seinem Durchmesser in zwei Hälften geteilt.
- ▶ Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich.
- ▶ Die Winkel zwischen zwei sich schneidenden geraden Linien sind gleich.
- ▶ Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei gleiche Winkel und eine gleiche Seite besitzen.

Beweise:

- ▶ Geometrische Aussagen (“in allen Fällen gilt...” s.o.)
- ▶ Aussagen über ganze Zahlen (s. unten, Übung 3)
- ▶ Korrektheit eines Algorithmus (Euklidischer Algor., s.u.)
- ▶ Existenzsätze (irrationale Zahlen, Dodekaeder)

(s. Wußing Kap. 5)

Beispiele: zu 1: Satz des Pythagoras, oder: in jedem Dreieck schneiden sich die Winkelhalbierenden in einem Punkt.

Zu 2.: Reguläres n -eck für $n = 4, 5, 6, 15$, Winkelhalbierung, Winkeldrittung (?!)

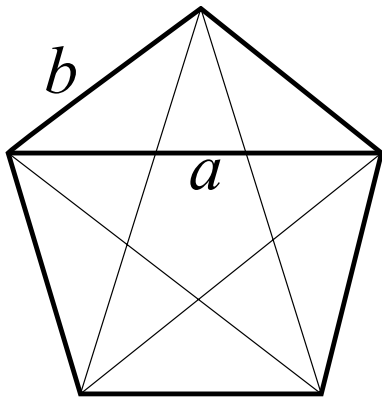
Zu 3.: Eindeutige Primfaktorzerlegung, oder Existenz unendlich vieler Primzahlen

Zu 4: ? Zu 5.:

Satz: In einem regulären Fünfeck ist das Verhältnis der Längen der Seiten und der Diagonalen irrational.

irrational: nicht von der Form $\frac{p}{q}$, wobei p und q irgendwelche ganzen Zahlen sind.

regulär: alle Seiten gleich lang, alle Innenwinkel gleich.



Wir brauchen: (Vereinbarung: Vollwinkel = 1)

(A) Außenwinkel eines regulären n -Ecks
ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$

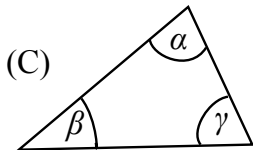
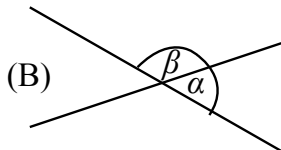
(B) $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$

(C) (Winkelsumme im Dreieck)
 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}$

(D) $a = b \Rightarrow \alpha = \beta$ (Thales !)

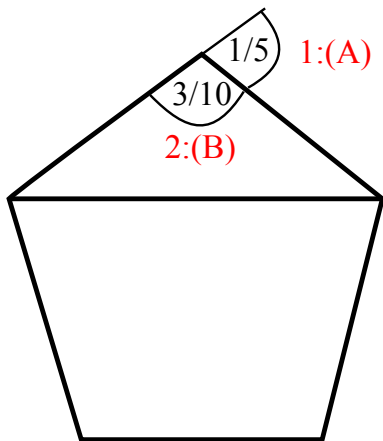
(E) $\alpha = \beta \Rightarrow a = b$

(F) Haben zwei Dreiecke die gleichen
Seitenlängen, dann auch die
gleichen Winkel.

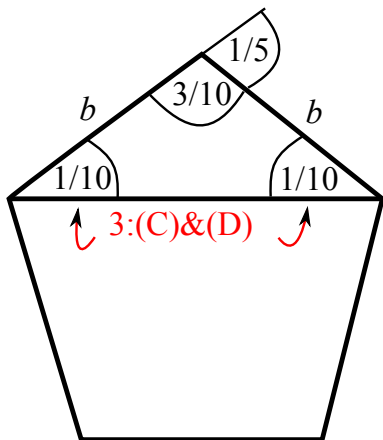


(D) & (E)

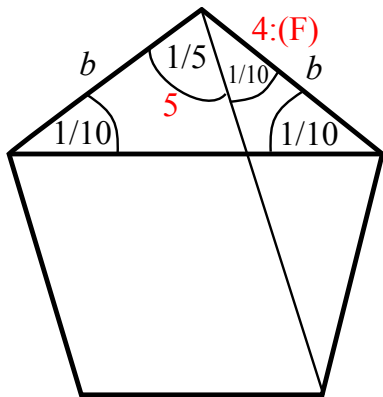




zu 2: $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}$

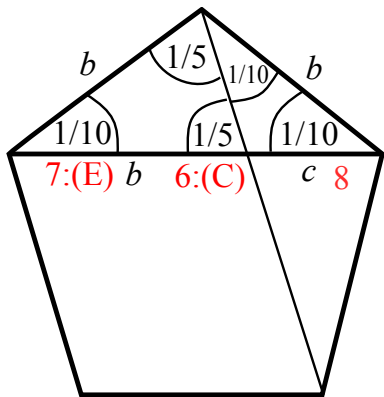


3: $\frac{3}{10} + ? + ? = \frac{1}{2}$, also $? = \frac{1}{10}$.



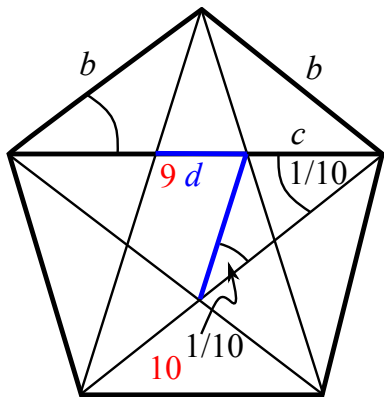
4: Regelmäßiges Fünfeck, also Dreiecke gleich (F).

$$5: \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$



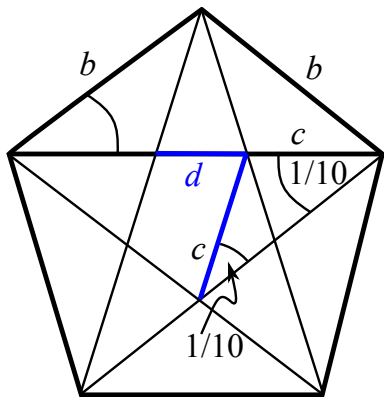
$$6: \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + ? = \frac{1}{2} \Rightarrow ? = \frac{1}{5}$$

$$8: c = a - b$$



9: $d := b - c$

10: Fünfeck regulär, also wie 3.



Und jetzt....

Angenommen, $\frac{a}{b}$ ist rational. Also können a und b als ganze Zahlen gewählt werden.

In der Mitte des großen regulären Fünfecks ist nun ein kleines reguläres Fünfeck. Dessen Diagonale ist c , dessen Seite d . Also:
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Wir sahen: $c = a - b$ und $d = b - c$. Also sind auch c und d ganze (positive!) Zahlen.

Wir können das Spiel von oben beliebig oft wiederholen, mit immer kleineren und kleineren Fünfecken. Das liefert immer kleinere und kleinere Zahlen $a > b > c > d > e > f > g > h \cdots > 0$.

Da alles ganze Zahlen sind, ist das unmöglich. Also muss unsere Annahme: " $\frac{a}{b}$ ist rational" falsch sein. Also ist $\frac{a}{b}$ irrational!