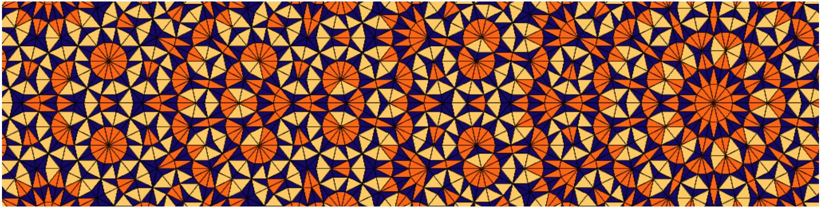
Panorama der Mathematik und Informatik

2: Geschichte: Antike

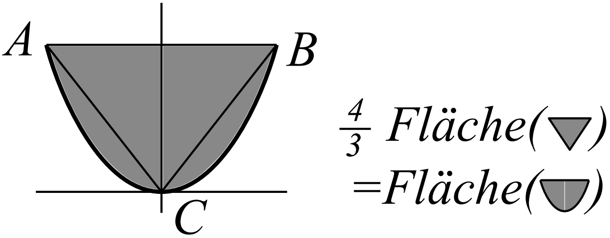
Dirk Frettlöh
Technische Fakultät

9.4.2015



Bei den alten Griechen: erstmals Beweise (nicht nur Rechenanleitungen = Algorithmen). Themen:

- Geometrie (z.B. Satz des Pythagoras, Konstruktion mit Zirkel und Lineal...)
- Zahlentheorie (Quadratsummen, irrationale Zahlen, Primfaktorzerlegung...)
- Algorithmen, Näherungsrechnung (z.B. euklidischer Algorithmus, Approximation Kreisfläche oder Quadratwurzel...)



Noch ein Beispiel für einen antiken Satz, jetzt Beweis (etwas untypisch, da nicht geometrisch):

Satz von Euklid: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Widerspruchsbeweis. (wikipedia)

"Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Es sei m das Produkt aller dieser Zahlen. Betrachten wir nun $m + 1$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:
1. $m + 1$ ist eine Primzahl. Sie ist dann nach Konstruktion größer als $p_1, \ldots, p_n$ und somit eine weitere Primzahl im Widerspruch zur Annahme.
2. $m + 1$ ist keine Primzahl. Sie muss daher einen Primteiler q besitzen. Nach Annahme muss q dann eine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ sein, und folglich Teiler von m. Als Teiler von m und von $m + 1$ müsste q aber auch die Differenz, also 1, teilen. Da 1 keinen Primteiler besitzt, ergibt sich ein Widerspruch. Die Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, ist also falsch."

Euklidischer Algorithmus:

"[The Euclidean algorithm] is the granddaddy of all algorithms, because it is the oldest nontrivial algorithm that has survived to the present day." Donald Knuth, The Art of Computer Programming.

Ziel: Größter gemeinsamer Teiler. Z.B. von 322 und 138.

Algorithmus: Input: $a > b$ positive ganze Zahlen.

1. Ziehe b von a wiederholt ab, bis das Ergebnis c kleiner als b ist.
2. $c = 0$: STOP. Ausgabe b.
3. Sonst $a := b$, $b := c$, weiter bei 1.

Bsp.: 1. $322 - 138 = 184$, $184 - 138 = 46$, 2. $138 - 46 = 92$, $92 - 46 = 46$, $46 - 46 = 0$. STOP. Ausgabe 46.

Heronverfahren: Näherung für Quadratwurzel aus $a > 0$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}, \quad x_0 \neq 0.$$

Dann $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Bsp.: $\sqrt{9} = ?$

$$\begin{aligned}
x_0 &= 5 \\
x_1 &= \frac{5 + \frac{9}{5}}{2} = \frac{\frac{34}{5}}{2} = \frac{34}{10} = 3{,}4 \\
x_2 &= \frac{\frac{34}{10} + \frac{9}{\frac{34}{10}}}{2} = \frac{\frac{34}{10} + \frac{90}{34}}{2} = \frac{257}{85} = 3{,}0235294\ldots \\
x_3 &= \frac{\frac{257}{85} + \frac{9}{\frac{257}{85}}}{2} = \frac{\frac{257}{85} + \frac{765}{257}}{2} = \frac{65537}{21845} = 3{,}000091554\ldots.
\end{aligned}$$

Sinnvoll zu implementieren! Zahl der korrekten Stellen verdoppelt sich in jedem Iterationsschritt.

Ein Höhepunkt: Euklid's *Elemente* (Band 1-13).

Axiomatischer Aufbau: Definitionen und Axiome, Satz, Beweis.

wikipedia: "Dieses Vorgehen beeinflusste bis heute nicht nur die Mathematiker, sondern auch viele Physiker, Philosophen und Theologen bei ihrem Versuch, ihre Wissenschaft auf Axiomen aufzubauen.
Die Elemente wurden 2000 Jahre lang als akademisches Lehrbuch benutzt und waren bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts das nach der Bibel meistverbreitete Werk der Weltliteratur."

Buch 1-6: Flächengeometrie, u. a. kongruente und ähnliche Figuren

- Buch 1: Von den Definitionen bis zum Satz des Pythagoras
- Buch 2: Geometrische Algebra
- Buch 3: Kreislehre
- Buch 4: Vielecke
- Buch 5: Irrationale Größen
- Buch 6: Proportionen

Buch 7-9: Arithmetik, u. a. Zahlentheorie und Proportionenlehre

- Buch 7: Teilbarkeit und Primzahlen
- Buch 8: Quadrat-, Kubikzahl und geometrische Reihen
- Buch 9: Gerade und ungerade Zahlen

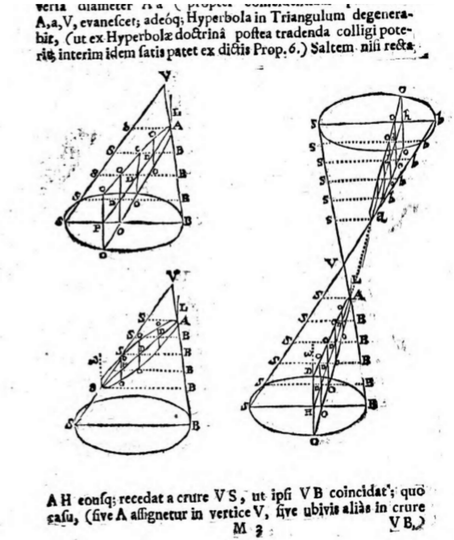
Buch 10: Geometrie für inkommensurable Größen
Buch 11-13: Raumgeometrie

- Buch 11: Elementares zur Raumgeometrie
- Buch 12: Exhaustionsmethode
- Buch 13: Die fünf gleichmäßigen Körper

Euklids *Elemente* bieten eine Übersicht über die Themen der alt-griechischen Mathematik.... bis 300 v. Chr.
Danach gab es noch ein paar weitere Höhepunkte:

- **Archimedes** (287-212 v.Chr.): Kreisfläche, Parabelfläche mit Exhaustionsmethode; Winkeldreiteilung (mit Einschiebung); Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks; Kugelvolumen
- **Eratosthenes** (um 240 v.Chr.): Sieb des Eratosthenes; Berechnung des Erdumfangs; Entwurf einer Erdkarte
- **Apollonius** (ca. 262-ca. 190 v.Chr.): Kegelschnitte
- **Diophantos** (um 250 n.Chr.): Bestimmte und unbestimmte Gleichungen bis zu sechstem Grad mit ganzzahligen Lösungen (**diophantische Gleichungen**); Systeme solcher Gleichungen; Variablen

Kegelschnitte: Schnitt einer Ebene mit einem *Kegel*:

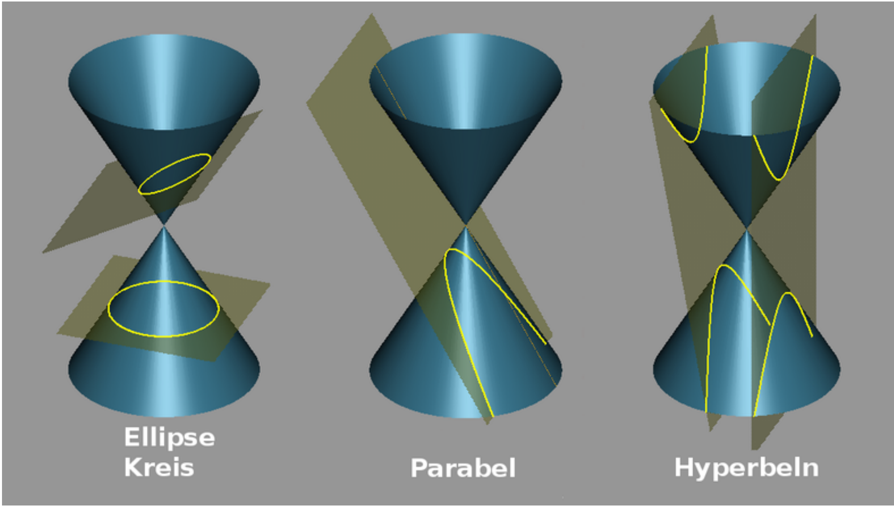


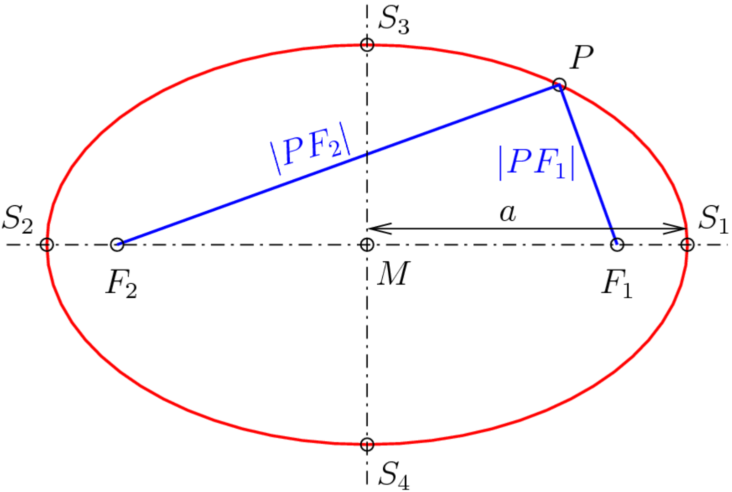
A,a,V, evaneſcet; adeóq; Hyperbola in Triangulum degenerabit, (ut ex Hyperbolæ doctrinâ poſtea tradenda colligi poterit; interim idem ſatis patet ex dictis Prop. 6.) Saltem niſi recta

A H conſq; recedat a crure V S, ut ipſi V B coincidat; quo caſu, (ſive A aſſignetur in vertice V, ſive ubivis aliàs in crure V B,)

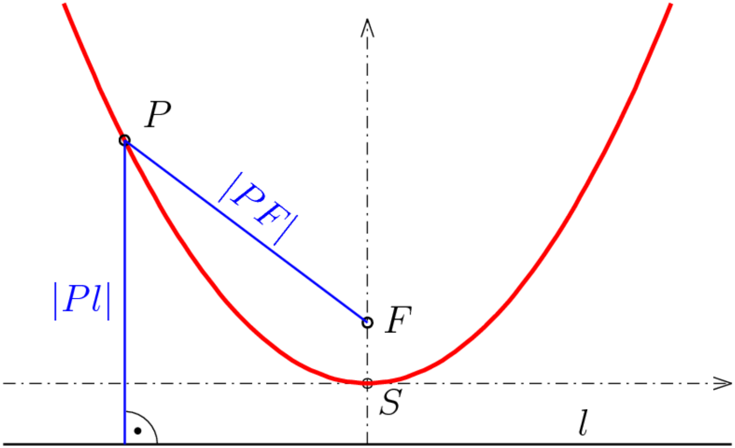
M 3

Treatise on the Conic Sections, John Wallis 1655

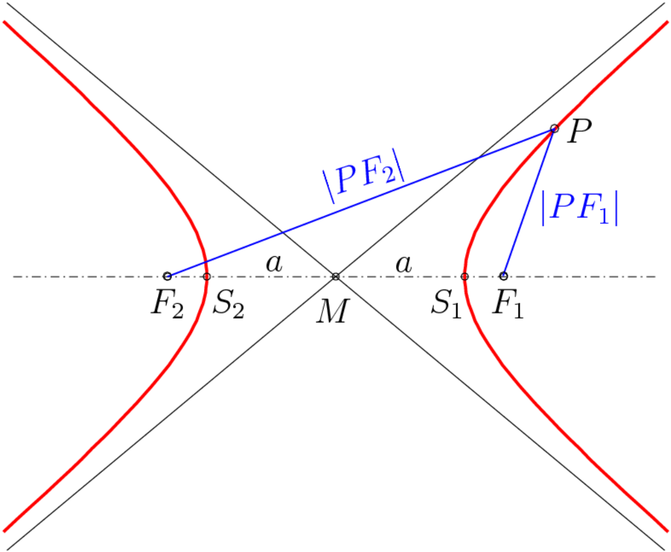

Ellipse
Kreis
Parabel
Hyperbeln



$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$



$$|PF| = |Pl|$$



$$||PF_2| - |PF_1|| = 2a$$

Quizfrage: Was gibt's außerdem für Fälle?

Bei Apollonius (alte und eigene Resultate):

- Konstruktion
- Asymptoten der Hyperbel
- Brennpunkte
- Je zwei Kegelschnitte haben maximal 4 Schnittpunkte
- Ähnliche Kegelschnitte
- ...und etliches mehr

Schon bei den Griechen der Antike: Wert auf Strenge und Exaktheit.

Archimedes' Trick: "mechanische" Methode: erst praktisch, dann theoretisch. Z.B erst wiegen/messen, dann Formel beweisen.

Z.B. Volumen Zylinder : Volumen Kugel : Volumen Kegel = 3:2:1

Diese Idee kann man durch wiegen bekommen, oder Flüssigkeit messen, oder... und dann exakt beweisen.

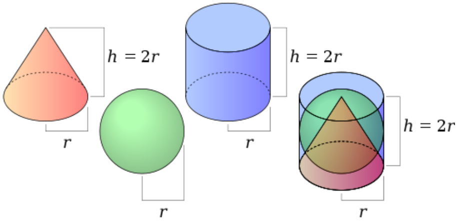
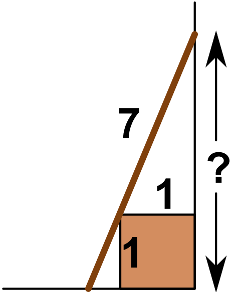


Illustration Exaktheit: Die Leiteraufgabe



- Ingenieur: Ziemlich genau 6,90 m.
- Informatiker: Wie viele Stellen? 6,90162289514212...
- Mathematiker: $\frac{1}{2}(1 + 5\sqrt{2} + \sqrt{47 - 10\sqrt{2}})$.

Was gilt eigentlich als Beweis?
"A proof is any completely convincing argument." (Errett Bishop)

Genaugenommen ändert sich das über die Jahrhunderte. Aber die Grundidee finden wir bei Euklid:

Ausgehend von einigen Axiomen und Definitionen ziehen wir legale Schlüsse (Logik!) bis wir das Resultat erhalten.

Bereits bewiesene Resultate dürfen genutzt werden.

Beispiele dazu oben.

Obacht:

Manche als wahr angenommene Dinge stellen sich als falsch heraus, oder nur in einem bestimmten Rahmen gültig. Etwa

- In einem Dreieck ist die Winkelsumme 180°.
- Hat Dreieck A genau die doppelten Seitenlängen von Dreieck B, so haben A und B die gleichen Winkel.
- Jede ganze Zahl hat eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren ("Eindeutige Primfaktor-Zerlegung", EPZ).

Die ersten beiden Punkte sind falsch in der sphärischen Geometrie (ebene Geometrie auf der Kugeloberfläche).
(Eisbärgeschichte!)

Der dritte Punkt ist falsch in anderen Zahlringen. Es gibt z.B. auch die ganzen komplexen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

(OK, da gilt noch EPZ), oder allgemeiner

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

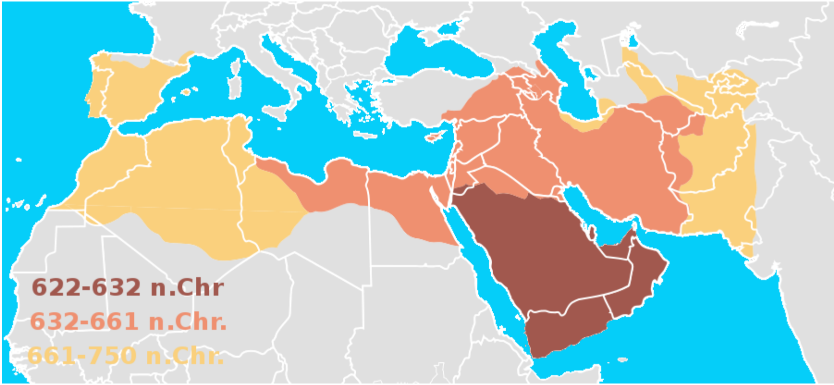
Hier gilt keine EPZ! Z.B. $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$.

(Das kam viel später, Stichworte "Fermats letzter Satz", "ideale Zahlen")

Nach den alten Griechen kam das finstere Mittelalter...

... nicht ganz. Die Erben waren Rom (keine mathematischen Fortschritte, aber Anwendung etwa in der Architektur), Ost-Rom = Byzanz, und die islamische Welt.

Dank der Byzantiner und der islamischen Gelehrten sind etwa die Werke von Euklid (komplett im griech. Originaltext) oder die des Apollonius erhalten (acht Bände über Kegelschnitte, Band 1-4 sind im griech. Originaltext erhalten, Band 5-7 nur auf arabisch, Band 8 verschollen).



Um 750 wird Bagdad Hauptstadt. Kalifen (al-Mansur, Harun ar-Rashid, al-Ma'mun) fördern Wissenschaft: *"Haus der Weisheit"*

Sammeln und Übersetzen der antiken Werke ins Arabische. Neben griechischen auch aus Persien, Ägypten, Indien (!).