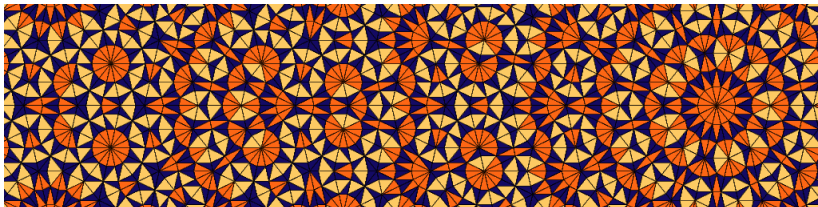


8: Don Knuth II

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät

30.4.2014



Eine Arbeit von Don Knuth soll jetzt im Detail vorgestellt und eingeordnet werden. Dazu müssen wir etwas ausholen...

Kombinatorik: Dinge zählen.

Bsp.: In wie viele Teile kann eine Pizza mit n geraden Schnitten höchstens geteilt werden?

Schnitte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Teile	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79	92	106

Man kann zeigen: n Schnitte, $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ Teile = $\binom{n+1}{2} + 1$ Teile.

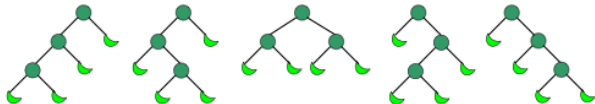
Die $\binom{n+1}{2}$ heißen **Dreieckszahlen**: 

Bsp.: Anzahl der Möglichkeiten, ein Produkt mit $n + 1$ Faktoren (sinnvoll !) zu klammern:

$$2 \cdot (3 \cdot ((4 \cdot 5) \cdot 6)), \quad 2 \cdot (3 \cdot (4 \cdot (5 \cdot 6))), \quad (2 \cdot 3) \cdot ((4 \cdot 5) \cdot 6), \dots$$

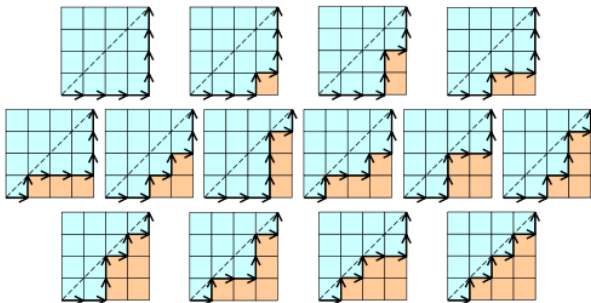
Faktoren	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mögl.	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Bsp.: Anzahl der binären Wurzelbäume mit $n + 1$ Blättern
 (kein Knoten hat nur einen Nachfolger, rechts \neq links)



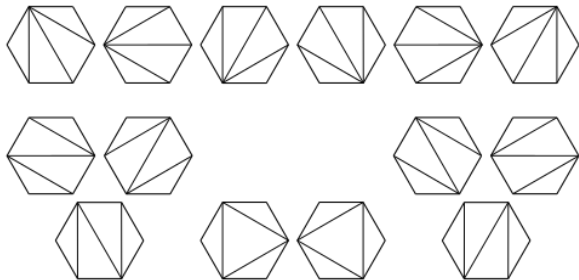
Faktoren	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mögl.	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Bsp.: Anzahl der monotonen Wege in einem $n \times n$ -Quadrat von unten links nach oben rechts, die nie die Diagonale überschreiten.



Faktoren	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mögl.	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Bsp.: Anzahl der Möglichkeiten, ein $n + 2$ -Eck mit geraden Schnitten (nur von Ecke zu Ecke) in Dreiecke zu zerteilen.



Faktoren	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mögl.	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Die Zahlen aus den letzten vier Beispielen heißen **Catalan-Zahlen**.

Exercise 6.19 in

Richard P. Stanley: *Enumerative combinatorics* Band 2,
Cambridge University Press 1999

listet 66 Zählprobleme auf, die als Lösung die Catalanzahlen haben.

(Im Netz: Fortsetzung, 141 weitere Zählprobleme, deren Lösung die Catalanzahlen sind)

oeis.org

Zeigen:

- ▶ Fibonaccizahlen
- ▶ Catalanzahlen
- ▶ Kolakoski
- ▶ 1,2,3,4,5,6,7,8,9
- ▶ 1,1,4,7,19,40,97,217,508

April 2015: ungefähr 250 000 Einträge

Bei solchen **kombinatorischen** Problemen sucht man:

- ▶ Rekursionsgleichung (gut)
- ▶ Erzeugende Funktion (besser)
- ▶ Geschlossene Formel (am besten)

Catalanzahlen: Rekursion:

$$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \cdots + c_{n-1} c_0, \quad c_0 = 1, c_1 = 1.$$

Erzeugende Funktion:

$$C(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}}$$

Geschlossene Formel:¹

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! n!} = \prod_{k=2}^n \frac{n+k}{k}$$

¹etwas, wo nur n eingesetzt werden muss

Erzeugende Funktionen

Wie findet man das? Ein Weg: Erzeugende Funktionen!

Dazu zunächst Wiederholung Mathe 1/2: Ein zentrales Thema:

(Viele) Funktionen lassen sich als Potenzreihen schreiben.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- ▶ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$
- ▶ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (x \in \mathbb{R})$
- ▶ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R})$
- ▶ $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$
- ▶ $x^2 = 0 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + \dots$

Wichtig in dem Zusammenhang: **Taylorreihe**.

Ist f unendlich oft differenzierbar, so ist die Taylorentwicklung (um den Punkt a)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$\text{bzw. } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$\text{also für } a = 0 : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Bsp:

- ▶ e^x
- ▶ x^2 (!)

Bei kombinatorischen Problemen mit Zählwerten a_0, a_1, a_2, \dots
sucht man nun $f(x)$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Erklärung am Beispiel der **Fibonaccizahlen**

Def.: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $f_0 = 1$, $f_1 = 1$

1 junges Hasenpaar in Monat 0 wird

1 altes Hasenpaar in Monat 1 wird

1 altes und 1 junges Hasenpaar in Monat 2 wird

2 alte und 1 junges Hasenpaar in Monat 3 wird

3 alte und 2 junge Hasenpaare in Monat 4 wird

5 alte und 3 junge Hasenpaare in Monat 5...

Insgesamt: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,... Paare.

geminat. sic fit in 10 mense paria 7 er quib' i uno mēse duo p̄gnant
 7 geminat in 10 mēse paria 2 coniclar. sic fit paria 4 i 10 mē
 se. er quib' i 10 p̄gnat paria 7 7 fit i q̄rto mēse paria 8 er q̄b'
 paria 4 geminat alia paria 4 quib' addit cū parijs 8 faci
 ut paria 12 i q̄rto mēse. er q̄b' paria 4 q̄ geminata fuerit i 10
 mēse si capiat i 10 mēse h' alia 8 paria p̄gnant sic fit i tertio mēse
 paria 2 i cū q̄b' addit parijs 12 q̄ geminat i septimo erit i 10
 paria 7 cū quib' addit parijs 2 i q̄ geminat i octavo mēse.
 erit i 10 paria 4 cū quib' addit parijs 7 q̄ geminat i no
 no mēse erit i 10 paria 8 cū quib' addit rursum parijs 4
 q̄ geminat i decimo. erit i 10 paria 14 cū quib' addit rursum
 parijs 8 q̄ geminat i undecimo mēse. erit i 10 paria 22
 cū q̄b' addit parijs 14 q̄ geminat in ultimo mēse. erit
 paria 77 7 tot paria pepit sicut par i p̄fato loco 7 capite uni
 am. potest ē unde i hao margine. qualis hoc opati sumus. q̄ uirum
 p̄mū nūm cū so uidet i cū 7 7 fin o' tēto. 7 tēto cū q̄rto. 7 q̄r
 tū cū q̄rto. 7 sic deinceps donec uirum decimū cū undecimo. uidet
 14 cū 22. 7 hūm' stoz cuniclor sumā uidet. 77
 sic posset face p ordine de infinitis mētib'.

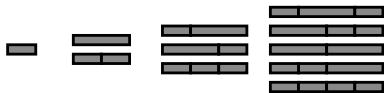
116
 117
 118
 119
 120
 121
 122
 123
 124
 125
 126
 127
 128
 129
 130
 131
 132
 133
 134
 135
 136
 137
 138
 139
 140
 141
 142
 143
 144
 145
 146
 147
 148
 149
 150
 151
 152
 153
 154
 155
 156
 157
 158
 159
 160
 161
 162
 163
 164
 165
 166
 167
 168
 169
 170
 171
 172
 173
 174
 175
 176
 177
 178
 179
 180
 181
 182
 183
 184
 185
 186
 187
 188
 189
 190
 191
 192
 193
 194
 195
 196
 197
 198
 199
 200

Quatuor hoies fit. quoz p̄m' sed' 7 tē' hūc d̄rios. sed' itaq' 7 tē' 7 q̄r'
 hūc d̄rios 21 tē' q̄r' p̄m' hūc d̄rios 24 Er' n' p̄m' 7 fit
 hūc d̄rios 27 Er' q̄r' unūq̄q' hūc. adde hol. unū. nuos i unū erit
 12 q̄ nūc ē t̄plū totū sume d̄rioz illoz. unū. homū. Ideo q̄ i p̄m'
 sumā unūq̄q' eoz o' apuatur ē q̄r' d̄rioz 10 p̄ reddet 7 p̄ eoz
 sumā. erqua si erant d̄rios p̄m' 7 tē' hūc 21 unū mēse

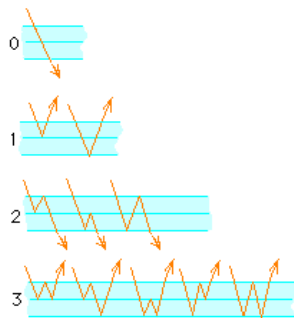
paria
 1
 p̄m'
 2
 sed'
 3
 tē'
 4
 q̄r'
 5
 q̄r'
 6
 sed'
 7
 8
 q̄r'
 9
 sed'
 10
 11
 12
 13
 14
 15
 16
 17
 18
 19
 20
 21
 22
 23
 24
 25
 26
 27
 28
 29
 30
 31
 32
 33
 34
 35
 36
 37
 38
 39
 40
 41
 42
 43
 44
 45
 46
 47
 48
 49
 50
 51
 52
 53
 54
 55
 56
 57
 58
 59
 60
 61
 62
 63
 64
 65
 66
 67
 68
 69
 70
 71
 72
 73
 74
 75
 76
 77
 78
 79
 80
 81
 82
 83
 84
 85
 86
 87
 88
 89
 90
 91
 92
 93
 94
 95
 96
 97
 98
 99
 100

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10
 11
 12
 13
 14
 15
 16
 17
 18
 19
 20
 21
 22
 23
 24
 25
 26
 27
 28
 29
 30
 31
 32
 33
 34
 35
 36
 37
 38
 39
 40
 41
 42
 43
 44
 45
 46
 47
 48
 49
 50
 51
 52
 53
 54
 55
 56
 57
 58
 59
 60
 61
 62
 63
 64
 65
 66
 67
 68
 69
 70
 71
 72
 73
 74
 75
 76
 77
 78
 79
 80
 81
 82
 83
 84
 85
 86
 87
 88
 89
 90
 91
 92
 93
 94
 95
 96
 97
 98
 99
 100

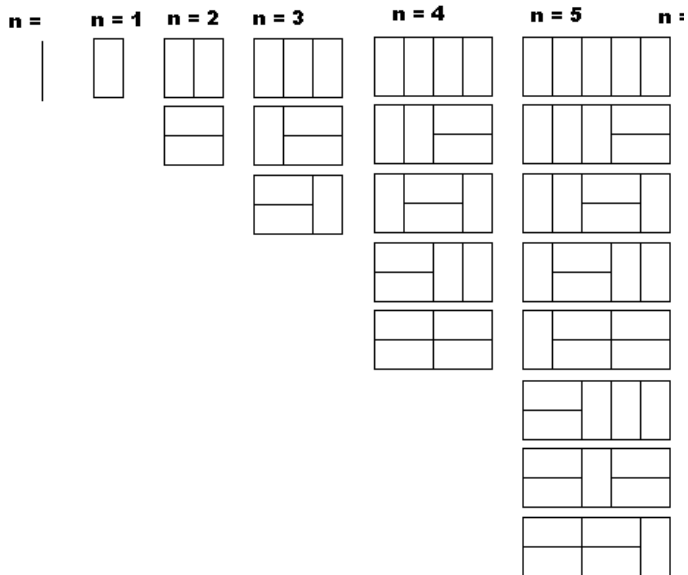
Oder: Anzahl der Möglichkeiten, ein Intervall der Länge n in Intervalle der Länge 1 und 2 zu teilen:



Oder Zahl der Möglichkeiten, wie ein Lichtstrahl in einem Doppelglasfenster $(n + 1)$ -mal reflektiert werden kann (\rightarrow)



...oder: Anzahl der Möglichkeiten, mit 2×1 -Dominos ein $2 \times n$ -Rechteck zu legen.



Ansatz: $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$

$$F(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \quad (1)$$

$$= 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} x^{n+2} \quad (2)$$

$$= 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1} + f_n) x^{n+2} \quad (3)$$

$$= 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} \quad (4)$$

$$= 1 + x + x \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^{n+1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad (5)$$

$$= 1 + x + x \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n + x^2 F(x) \quad (6)$$

$$= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n + x^2 F(x) = 1 + xF(x) + x^2 F(x) \quad (7)$$

Also

$$F(x)(1 - x - x^2) = 1, \text{ also } F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

In Sage: `taylor(1/(1 - x - x^2), x, 0, 8):`

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + O(x^8)$$

Klappt!

F ist die gesuchte **erzeugende Funktion**.

Für die **Geschlossene Formel**: F vereinfachen. Z.B. zu

- ▶ $\frac{1}{1-7x} = \sum_{n=0}^{\infty} 7^n x^n$ (dann wäre $f_n = 7^n$), oder
- ▶ $\frac{21}{1-7x} + \frac{2}{1+5x} = 3 \cdot 7 \sum_{n=0}^{\infty} 7^n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-5)^n x^n$
(dann wäre $f_n = 3 \cdot 7^{n+1} + 2 \cdot (-5)^n$)

Wo sind wir?

- ▶ **Rekursion:** klar, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $f_0 = 1$, $f_1 = 1$.
- ▶ **Erzeugende Funktion:** $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}$ haben wir jetzt.
- ▶ **Geschlossene Formel:** (“closed form”) bestimmen wir nun aus der erzeugenden Funktion F .

Wegen $\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$ hätten wir F gerne in einer Form wie

$$F(x) = \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx} + \dots$$

Ansatz: (recall Mathe 2) Partialbruchzerlegung!

Stelle Nenner dar als Produkt: $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$
(! Variante der Partialbruchzerlegung)

$$1 - 1x - 1x^2 = 1 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta x^2$$

Löse $\alpha + \beta = 1$ und $\alpha\beta = -1$, also $\alpha - \frac{1}{\alpha} = 1$, also $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$:

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Gesucht: A, B mit

$$\frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x} = \frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)}$$

$$A(1 - \beta x) + B(1 - \alpha x) = 1$$

$$A - A\beta x + B - B\alpha x = 1 + 0 \cdot x$$

also (Koeffizientenvergleich)

$$A + B = 1, \quad -A\beta - B\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 1 - B, \quad -(1 - B)\beta - B\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 1 - B, \quad B(\beta - \alpha) = \beta$$

$$\stackrel{(\beta - \alpha = -\sqrt{5})}{\Leftrightarrow} A = 1 - B, \quad B = \frac{\beta}{-\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow A = 1 - \left(-\frac{\beta}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} (!), \quad B = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\beta}{1-\beta x} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n - \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) x^n
 \end{aligned}$$

Damit haben wir die **Formel von Moivre-Binet** erhalten:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \quad \text{mit } \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \beta = \frac{-\sqrt{5}+1}{2},$$

Damit: wie verhalten sich die f_n für $n \rightarrow \infty$?

Da $\beta < 1$ gilt $\beta^n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$.

Also $f_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n+1} \approx 0,4472 \cdot 1,608^{n+1}$.

Insbesondere: Fibonaccizahlen wachsen exponentiell.

Einige Werte der Approximation: $n = 7 : 12,984\dots$,
 $n = 8 : 21,009\dots$, $n = 9 : 33,994\dots$, $n = 10 : 55,003\dots$, ...,
 $n = 30 : 83204,000000024\dots$

Beispiele für erzeugende Funktionen

- ▶ Fibonaccizahlen: $F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$
- ▶ verschobene Fibonacciz. ($f_0 = 0, f_1 = 1, \dots$): $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$
- ▶ Catalanzahlen: $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$
- ▶ Dreieckszahlen: $\frac{x}{(1-x)^3}$
- ▶ $1, 1, 1, 1, 1, \dots$: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ (auch: $\frac{x}{1-x}$)
- ▶ $1, 2, 3, 4, 5, \dots$: $\frac{x}{(1-x)^2}$
- ▶ n -te Binomialkoeffizienten:
 $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \dots$

Knuths Toilet Paper Paper

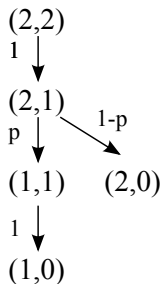
Donald E. Knuth: The Toilet Paper Problem, *The American Mathematical Monthly* 91 (1984) 465-470

“The toilet paper dispensers in a certain building are designed to hold two rolls of tissues, and a person can use either roll. There are two kinds of people who use the rest rooms in the building: big-choosers and little-choosers. A big-chooser always takes a piece of toilet paper from the roll that is currently larger; a little-chooser always does the opposite. However, when the two rolls are the same size, or when only one roll is nonempty, everybody chooses the nearest nonempty roll. When both rolls are empty, everybody has a problem.”

Wahrscheinlichkeit für “big-chooser”: p ,
für “little-chooser”: $q = 1 - p$.

Start mit n Papierportionen auf beiden Rollen. $M_n(p)$ ist die erwartete Zahl der Portionen auf einer Rolle, wenn die andere leer ist.

- ▶ $M_n(0) = n$
- ▶ $M_n(1) = 1$
- ▶ $M_1(p) = 1$
- ▶ $M_2(p) = 2 - p = 1 \cdot p \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (1 - p) \cdot 1 \cdot 2$



“The purpose of this paper is to study the asymptotic value of $M_n(p)$ for fixed p as $n \rightarrow \infty$. We will see that the generating function $\sum_n M_n(p)z^n$ has a surprisingly simple form, from which the asymptotic behavior can readily be deduced.”

Mit Hilfe von Rekursionen für $M_{mn}(p)$ (Start mit m und n Papierportionen) findet er

$$M_n(p) = c_1 p M_{n-1}(p) + c_2 p^2 M_{n-2}(p) + \cdots + c_{n-1} p^{n-1} M_1(p) + L_n(p)$$

$$L_n(p) = \sum_{2 \leq k \leq n} k d_{nk} p^{n-k} q^{n-1} \quad (n \geq 2), \quad L_1(p) = 1$$

Hier bezeichnet c_n die Catalanzahlen, und d_{nk} sind auch bekannte kombinatorische Zahlen:

$$d_{nk} = \binom{2n-k-2}{n-2} \frac{k-1}{n-1}$$

Nach nützlichen Vorüberlegungen in Kap. 3 macht er in Kap. 4 den Ansatz

$$M(z) = \sum_{n \geq 1} M_n(p)z^n; \quad L(z) = \sum_{n \geq 1} L_n(p)z^n$$

und findet aus der Rekursionsgleichung oben

$$M(z) - L(z) = \frac{1}{1-p} C(p(1-p)z)M(z)$$

(C die erz. Funktion der Catalanzahlen). Daraus dann

$$M(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \left(\frac{1-p - C(p(1-p)z)}{q} \right)$$

Das lässt sich schön in als Potenzreihe schreiben. Damit:

$$M_n(p) = n - (n-1)c_1p - (n-2)c_2p^2(1-p) - \dots - 1c_{n-1}p^{n-1}p^{n-2}$$

Damit wird in Kap. 5, Theorem 1, das “limiting behavior” beschrieben (Asymptotik für $n \rightarrow \infty$)

(Tippfehler? $O(r^n)$ wird sehr groß für $r = 2$. Soll aber offenbar klein sein):

“For example, if $p = 2/3$ and $q = 1/3$, so that big-choosers outnumber little-choosers by 2 to 1, the average size of the remaining roll will be very close to 2, when n is large; but when $p = 1/3$ and $q = 2/3$ the average will be approximately $\frac{1}{2}n + 1$.”

Kap. 6: Was passiert für $p = 1/2$? Theorem 2: noch einfachere Formel

$$M_n(p) = \frac{2n}{4^n} \binom{2n}{n} \approx 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{\pi n}}$$