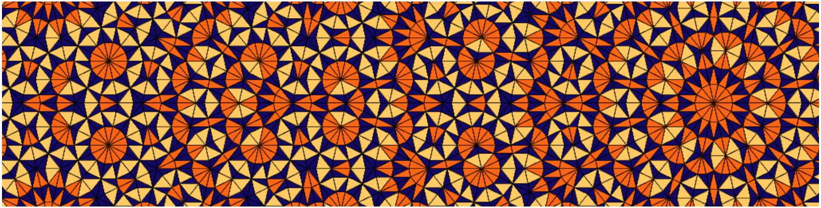
Panorama der Mathematik und Informatik

9: Don Knuth III / Ramseytheorie / Geschichte IV: Wiss. Revolution

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät

5.5.2014



Eine Arbeit von Don Knuth wurde letzte Stunde im Detail vorgestellt und eingeordnet:

Donald E. Knuth: The Toilet Paper Problem, *The American Mathematical Monthly* 91 (1984) 465-470

Knuth zählt das Toilet Paper Paper zu "Analyse von Algorithmen".

Er hat auch ein paar Bezeichnungen propagiert:

- "Big-Oh" Notation: $O(n \log n)$, $o(n), \ldots$
- $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$
- $[x^n]f(z)$: Koeffizient von x^n in der Potenzreihe von f
- Arrow Notation für hohe Zahlen.

Arrow Notation

Multiplikation: wiederholte Addition:

$$a \times b \quad = \quad \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ Kopien von } a}$$

Z.B.

$$4 \times 3 \quad = \quad \underbrace{4 + 4 + 4}_{3 \text{ Kopien von } 4} \quad = \quad 12$$

Potenzen: wiederholte Multiplikation:

$$a \uparrow b = a^b = \quad \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ Kopien von } a}$$

Z.B.

$$4 \uparrow 3 = 4^3 = \quad \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{3 \text{ Kopien von } 4} \quad = \quad 64$$

Nächster Schritt:

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{b \text{ Kopien von } a} = \underbrace{a \uparrow (a \uparrow (\ldots \uparrow a))}_{b \text{ Kopien von } a}$$

Z.B.

$$4 \uparrow\uparrow 3 = \underbrace{4^{4^{4}}}_{3 \text{ Kopien von } 4} = \underbrace{4 \uparrow (4 \uparrow 4)}_{3 \text{ Kopien von } 4} = 4^{256} \approx 10^{154}$$

Wächst sehr schnell, besonders in b. Bsp:

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$$

$$3 \uparrow\uparrow 4 = 3^{3^{3^3}} = 3^{3^{27}} = 3^{7625597484987} \approx 1.2580143 \times 10^{3638334640024}$$

$$3 \uparrow\uparrow 5 = 3^{3^{3^{3^3}}} = 3^{3^{3^{27}}} = 3^{3^{7625597484987}}$$

Knuth erweiterte dies zu

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow a))}_{b \text{ Kopien von } a}$$

und zu

$$a \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow\uparrow a))}_{b \text{ Kopien von } a}$$

usw. (!)

Prinzip: ein n-Pfeil-Operator steht für b Kopien von $(n-1)$-Pfeil-Operator:

$$a \underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n} b = \underbrace{a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} (a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} (\ldots \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a))}_{b \text{ Kopien von } a}$$

Bsp.:

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3) = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow 3 \uparrow 3) = \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \ldots \uparrow 3}_{3 \uparrow 3 \uparrow 3 \text{ Kopien von } 3}$$

$$= \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \ldots \uparrow 3}_{7\,625\,597\,484\,987 \text{ Kopien von } 3} = \underbrace{3^{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}}_{7\,625\,597\,484\,987}$$

Notation: $a \uparrow^n b$ steht für "a n Pfeile b".

Als Informatiker kennt man evtl die *Ackermann*-Funktion, oft durch eine Rekursion gegeben:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{if } m > 0 \text{ and } n = 0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & \text{if } m > 0 \text{ and } n > 0. \end{cases}$$

Wächst extrem schnell, besonders in m. Einige Werte:

$$A(0,n) = n+1, \quad A(2,n) = 2n+3, \quad A(3,n) = 2^{n+3} - 3$$

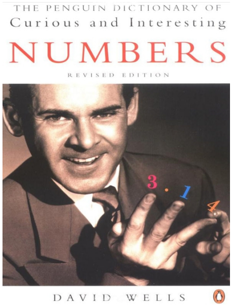
$$A(4,n) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n+3} - 3$$

Mit der Arrow-Notation: $A(m,n) = 2 \uparrow^{m-2} (n+3) - 3$.

Letzter Eintrag in "Dictionary of Curious and Interesting Numbers":

"Graham's number".

"...the largest number ever used in a serious mathematical proof." (M. Gardner 1977)



$$2\uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{12}3)}3)}3)}3)}3)}3)}3$$

Dies ist die Zahl, die wirklich im Beweis vorkommt. Im "Dictionary" steht da eine andere Zahl. (Siehe wikipedia: Graham's number)

Ron Graham fand, diese Zahl sei einfacher zu erklären:

$$G = \left.\begin{matrix} 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow}3 \\ 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow}3 \\ \underbrace{\qquad\vdots\qquad} \\ 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\uparrow}3 \\ 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \end{matrix}\right\} \text{64 layers}$$

bzw.

$$G = g_{64},\ \text{where } g_1 = 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3,\ g_n = 3\uparrow^{g_{n-1}} 3.$$

Diese Zahl hier ist etwas (?) größer.

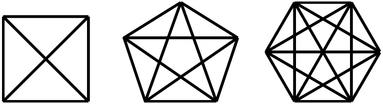
(Auch interessant: Eintrag 39 im Dictionary)

Ramsey-Theorie

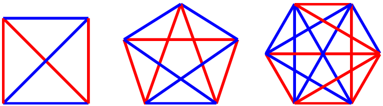
Graham's number taucht in *Ramseytheorie* auf. Ein Zweig der Kombinatorik. Typische Frage:

"Wie viele Elemente müssen innerhalb einer Struktur vorhanden sein, um eine bestimmte Eigenschaft zu garantieren?"
Exakte Antwort oft sehr schwierig, daher obere und untere Schranken (siehe oben).

Simples Bsp: Vollständiger Graph mit a Ecken, Kanten entweder blau oder rot. Ab welchem a findet sich **garantiert** ein einfarbiges Dreieck? (dessen Ecken Knoten des Graphen sind) Bzw als *Party-Problem*: Wieviel Leute müssen auf einer Party sein, so dass sich garantiert entweder 3 Leute gegenseitig kennen, oder 3 Leute sich gegenseitig nicht kennen.



Man kann zeigen: Ab $n = 6$ kommt garantiert ein einfarbiges Dreieck vor.



Was ist mit ”4” statt ”3”? Wieviel Punkte brauche ich, damit garantiert ein einfarbiger $\boxtimes$ vorkommt? Was ist mit “5” oder “6”?

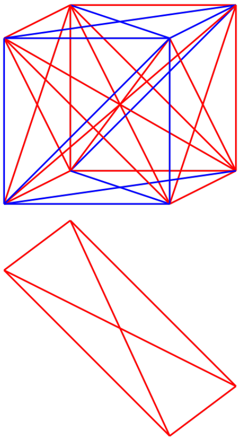
n	1	2	3	4	5	6	7
$a(n)$	1	2	6	18	?	?	?

Andere Beispiele:

- Welche Zahl $a(n)$ an Punkten in der Ebene $\mathbb{R}^2$ (keine drei auf einer Geraden) brauchen wir, damit wir garantiert darunter die Ecken eines konvexen n-Ecks finden?
- Wieviele Zahlen $1, 2, \ldots, b(n)$ brauchen wir, damit in jeder Liste mit diesen Zahlen garantiert eine Teilliste mit n aufsteigenden oder absteigenden Zahlen enthalten ist?
- Wieviele Zahlen $c(3, n)$ brauchen wir, damit in jeder Einfärbung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, c(3, n)$ es Zahlen $k, \ell, k + \ell$ mit gleicher Farbe gibt?

Bsp zu 2: $2, 1, 4, 7, 3, 5, 8, 6$ enthält vier aufsteigende Zahlen, (Z.B. $2, \underline{1}, \underline{4}, 7, 3, \underline{5}, \underline{8}, 6$) aber nicht fünf. Auch nicht 5 absteigende Zahlen. Also $b(5) > 8$.
Vgl. Rätsel Blatt 4: $b(n) = 101$.

Der Satz, in dem Grahams Zahl vorkommt:



Frage:

Connect each pair of geometric vertices of an n-dimensional hypercube to obtain a complete graph on 2^n vertices. Colour each of the edges of this graph either red or blue. What is the smallest value of n for which every such colouring contains at least one single-coloured complete subgraph on four coplanar vertices?

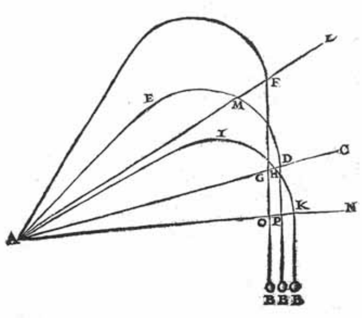
Graham 1971: Das gesuchte n liegt zwischen 6 und Grahams Zahl

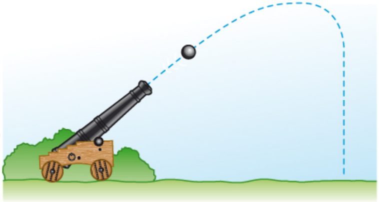
Lavrov, Lee, Mackay 2013; Exoo 2003; Barkley 2008: Zahl liegt zwischen 13 und $2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 9$.

Wissenschaftliche Revolution

Etwa ab dem 15. Jhdt:

- Gesellschaftliche Umbrüche:
  - Reformation, Bauernaufstände
  - Erstarken des Bürgertums (Hanse)
- Buchdruck (u.a. Verbreitung der Werke von Apollonius, Archimedes, Euklid...)
- Rückbesinnung auf die Antike
- Neuer Bedarf an Mathematik: Seefahrt, Geschütze, Wirtschaft, Kunst


L
F
E
M
I
D
C
G
H
K
N
O
P
A
BBB



59 (59 of 78) Fit Page Width Start Presentation Leave Fullscreen

Thumbnails

59

60

61

62

63

Abb. 7.7.9 Mechanische Erleichterung perspektivischen Zeichnens: Verwendung eines verstellbaren Stabes zur Fixierung des Augpunktes. Vorschläge Dürers in der 2. Auflage der [Underweysung 1525]

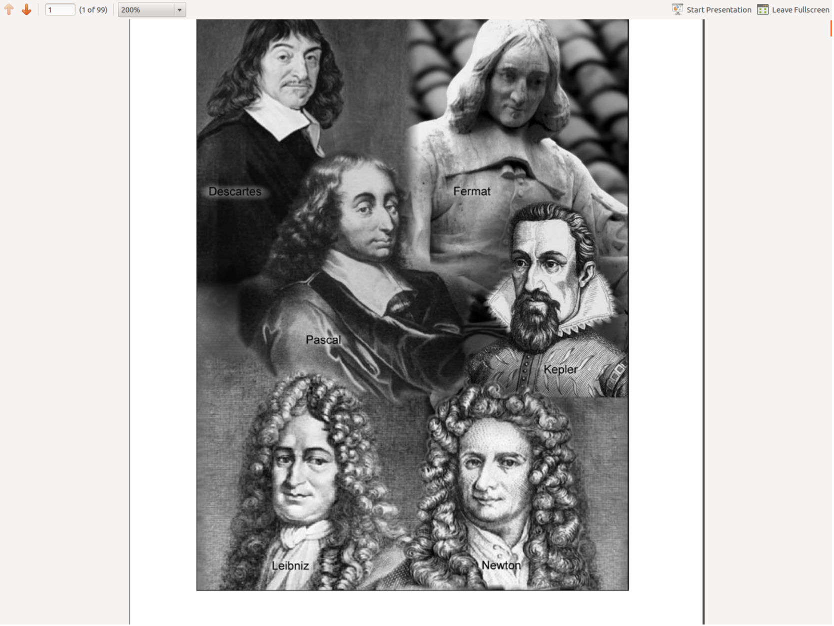
Aus der Kombination: freies Bürgertum, Wissenschaft löst sich von der Kirche, größere Verbreitung des Wissens (Buchdruck), neue Bedürfnisse usw...

...wuchs die "Wissenschaftliche Revolution". Das steht

"für die Zeit vom ausgehenden 16. Jahrhundert bis zum Beginn des 18. Jahrhunderts, mit dem Blick auf die gänzliche Umgestaltung der Naturwissenschaften nach Inhalt, Methode, Kommunikationsformen und gesellschaftlicher Relevanz und auf Wechselbeziehungen zu Religion und Philosophie. Bis zu einem gewissen Grade kann man sogar behaupten, dass der Typ der neuzeitlichen Mathematik und Naturwissenschaft in dieser Periode erst geschaffen wurde." (Wußing: "6000 Jahre...")

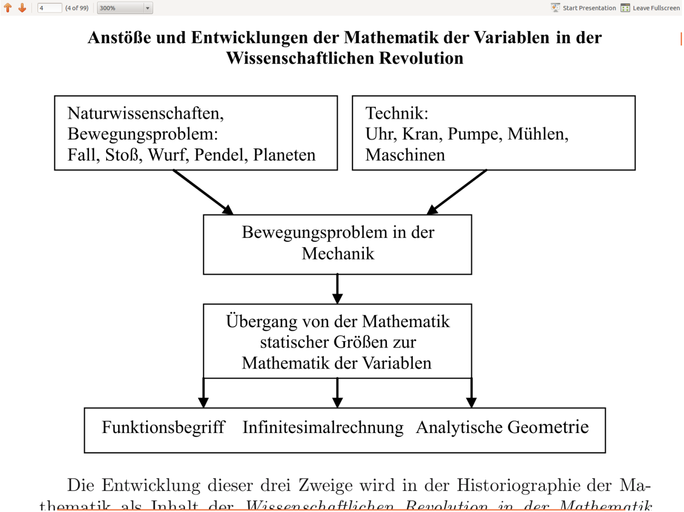
Was heißt das?

- Es wurde viel neues rausgefunden:
  - Kopernikus: Sonne im Mittelpunkt
  - Galileo: Fallgesetze; Theorie und Experiment (!)
  - Newton: Mechanik, Gravitation
- Wissenschaft als eigenständige Disziplin, unabhängig von Philosophie oder Religion
- Wissenschaftliche Methode ("scientific method"): Checken ob's stimmt


1
(1 of 99)
200%
Start Presentation
Leave Fullscreen
Descartes
Fermat
Pascal
Kepler
Leibniz
Newton

Lesetipp: Neal Stephenson: *The Baroque Cycle* (ca. 2700 Seiten)

(vielleicht vorher erst *Cryptonomicon* lesen, ca. 1000 Seiten)



Anstöße und Entwicklungen der Mathematik der Variablen in der Wissenschaftlichen Revolution

Die Entwicklung dieser drei Zweige wird in der Historiographie der Mathematik als Inhalt der *Wissenschaftlichen Revolution in der Mathematik*

Mathematische Fortschritte

- Allgemeine Lösungen kubischer Gleichungen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$: del Ferro, Tartaglia, Cardano[1]
- Gleichungen vierten Grades, komplexe Zahlen (Bombelli, Descartes)
- Logarithmen (Napier)
- Analysis: Funktion, Ableitung, Integral (Newton, Leibniz)

[1] s. Wußing, Kap 8, bzw. Lesetipp: D. Jörgensen: *Der Rechenmeister*)