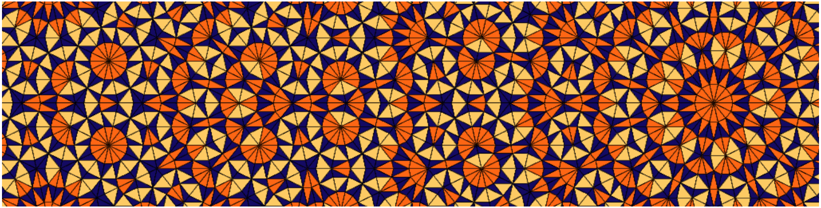
Panorama der Mathematik und Informatik

12: Hilberts 23 Probleme / Kurt Gödel

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät / richtig einsteigen

19.5.2015



Hilbertsche Probleme

Im Jahr 1900 formulierte **David Hilbert** eine Liste von 23 ungelösten Problemen in der Mathematik. Die liefert einen Einblick in den Stand um 1900.

Auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1900 in Paris stellt Hilbert die Liste vor. Die vollständige Liste wird in verschiedenen Sprachen veröffentlicht (1900 französisch, 1901 deutsch, 1902 englisch)

"Diese Überzeugung von der Löslichkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!" (~~Lukas Podolski~~) (D. Hilbert 1900)

Ein Irrtum! Siehe unten.

Abschweifung: Kai-Uwe Kling: Falsche Zitatzuschreibungen. Z.B.

- *“Niemand hat die Absicht, eine Mauer zu errichten” (Bob der Baumeister)*
- *“Wir brauchen mehr Wachstum” (Papa Schlumpf)*
- *“Alle Tiere sind gleich. Aber manche sind gleicher” (Klonschaf Dolly)*

A. Salle, D. F.: Dito für Mathezitate. Z.B.

- "Do not worry about your difficulties in Mathematics. I can assure you mine are still greater.” (~~Daniela Katzenberger~~) (Albert Einstein)
- "If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.” (~~Mr Bean~~) (John von Neumann)
- "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.” (~~Papst Franziskus~~) (Leopold Kronecker)
- "Es gibt zwei Dinge die unendlich sind: Das Universum und die menschliche Dummheit - beim Universum ist man sich noch nicht ganz sicher” (~~Georg Cantor~~) (Albert Einstein)

Problem 1: Kontinuumshypothese

Georg Cantor: 1845-1918

Es war bereits bekannt (Cantor): $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

(wobei $|A|$ die Mächtigkeit (oder Kardinalität) von A ist; "Anzahl der Elemente")

- $|\{1, 2, 3, 4\}| = 4$
- $|\mathbb{N}|$: unendlich.
- $|\mathbb{R}|$: unendlich. Aber mehr als $|\mathbb{N}|$

Lustiger Beweis: Cantors zweites Diagonalargument.

Benutze: Haben zwei Mengen die gleiche Mächtigkeit, dann gibt's eine Eins-zu-Eins Abbildung (**Bijektionen**) zwischen ihnen.

Zunächst: Cantors erstes Diagonalargument

Bsp: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\[2em]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\[2em]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\[2em]
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\[2em]
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1}\ (1) & \rightarrow & \frac{1}{2}\ (2) & & \frac{1}{3}\ (5) & \rightarrow & \frac{1}{4}\ (6) & & \frac{1}{5}\ (11) & \rightarrow \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{2}{1}\ (3) & & \frac{2}{2}\ (\cdot) & & \frac{2}{3}\ (7) & & \frac{2}{4}\ (\cdot) & & \frac{2}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
\frac{3}{1}\ (4) & & \frac{3}{2}\ (8) & & \frac{3}{3}\ (\cdot) & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
\frac{4}{1}\ (9) & & \frac{4}{2}\ (\cdot) & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
\frac{5}{1}\ (10) & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

(Bruch kürzbar: überspringen) liefert

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & \frac{1}{2} & 2 & 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 4 & 5 & \frac{1}{5} & \cdots
\end{array}
$$

Das zeigt bereits $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^+|$.

Vor die Eins fügt man eine Null ein und hinter jeder Zahl deren Negatives:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & -2 & 3 & -3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \cdots
\end{array}$$

das liefert $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Cantors zweites Diagonalargument

Jetzt zu $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$. Zeige: Es gibt **keine** Bijektion.

Noch nicht mal zwischen $\mathbb{N}$ und $[0;1[$.

Widerspruchsbeweis: Angenommen es gibt eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $[0;1[$. Dann kann ich die Elemente aus $[0;1[$ in eine Liste schreiben (Bei zwei Darstellungen wie in $0,1000\cdots = 0,0999\cdots$ nimm die endliche):

$$
\begin{array}{lccccccccc}
s_1 = 0, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
s_2 = 0, & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
s_3 = 0, & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
s_4 = 0, & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\
s_5 = 0, & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\
s_6 = 0, & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\
s_7 = 0, & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccccc}
s_1 = 0, & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
s_2 = 0, & 1 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
s_3 = 0, & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
s_4 = 0, & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & \ldots \\
s_5 = 0, & 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 & \ldots \\
s_6 = 0, & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 1 & \ldots \\
s_7 = 0, & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & \ldots \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}
$$

Wähle s so, dass die i-te Stelle von s nicht mit s_i übereinstimmt.

Hier: $s = 0,1011101\cdots$. Also kann s nicht in der Liste vorkommen!

Also war die Annahme, es gibt eine Bijektion zwischen $|\mathbb{N}|$ und $[0;1[$, falsch.

Kontinuumshypothese

Also ist $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Frage: Gibt's was dazwischen? Gibt es eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < |M| < |\mathbb{R}|$? Die *Kontinuumshypothese* ist: Nein.

Antwort: Ein Beweis ist unmöglich. Eine Widerlegung auch*. (Recall Hilberts Ignorabimus!)

*: Im Rahmen der Zermelo-Frenkel-Axiome
(ZFA, heute der Standard der axiomatischen Mengentheorie)

ZFA wurden erfunden, um **Russells Paradox** zu umgehen: naive Mengendefinition beschreibt eine Menge einfach als eine Zusammenfassung von Dingen.

Sei dann M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten... Ist $M \in M$?

Problem 2: Widerspruchsfreiheit der Arithmetik

Sind die Axiome der Arithmetik widerspruchsfrei?

Arithmetik: Rechnen mit Zahlen.

Axiome sollen Antworten liefern auf grundlegende Fragen wie

- Was ist eine Zahl?
- Was heißt gleich?
- Welche Axiome liefern nur $\mathbb{N}$, bzw. nur $\mathbb{R}$?

Peano-Axiome liefern $\mathbb{N}$, und (mit **Dedekind-Schnitten**) $\mathbb{R}$.

Widerspruchsfreiheit der Arithmetik

Sind die Axiome der Arithmetik widerspruchsfrei?

Antwort: Schwer zu sagen.

Kurt Gödel: Es kann innerhalb dieser Axiome keinen Beweis der Widerspruchsfreiheit geben. Dazu später mehr.

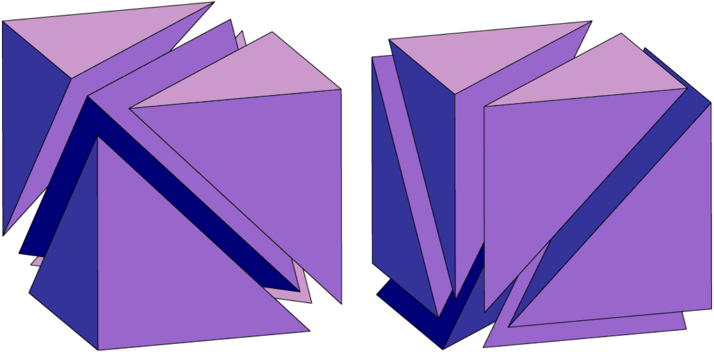
Problem 3: Zerlegungsgleichheit von Tetraedern

Gegeben zwei Tetraeder T_1 und T_2 mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe (also auch gleichem Volumen).

Sind T_1 und T_2 **zerlegungsgleich**? D.h.: Kann T_1 mit endlich vielen (geraden) Schnitten so zerlegt werden, dass die Teile zu T_2 zusammengesetzt werden können?

Antwort: Nein. (Max Dehn "Über den Rauminhalt", *Mathematische Annalen* 55 (1901) 465-478)

In zwei Dimensionen gilt dagegen:
Satz von Bolyai-Gerwien: Je zwei Polygone (Vielecke) in $\mathbb{R}^2$ sind zerlegungsgleich.



Schöner tricksiger Beweis, siehe Martin Aigner, Günter M.Ziegler: *Das BUCH der Beweise*, Springer 2010

Die beiden Tetraeder rechts und links sind nicht zerlegungsgleich. Dies war das erste von Hilberts 23 Problemen, das gelöst wurde.

Zu **David Hilbert (1862-1942)**

- Einer der letzten, der auf vielen verschiedenen Gebieten der Mathematik fundamentale Beiträge leistete: Analysis, Geometrie, Logik, algebraische Zahlentheorie...
- ...Physik: Allgemeine Relativitätstheorie
  - Einstein 1915: “Die Feldgleichungen der Gravitation”
  - Hilbert 1915: “Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung)”
- “Die Physik ist für die Physiker eigentlich viel zu schwer.”

Das Entscheidungsproblem

Recall 1900: Hilberts Problem 2 fragt nach Widerspruchsfreiheit der Axiome der Arithmetik.

1928 legt Hilbert nach ("Hilbertprogramm"): Er fragt nach

- **Formalisierung**: Alle Aussagen und Deduktionen formal präzise erfassen
- **Vollständigkeit**: Ein Beweis, dass alle wahren Aussagen in diesem Formalismus bewiesen werden können
- **Widerspruchsfreiheit**: Ein Beweis, dass dieser Formalismus widerspruchsfrei ist (wenn "A" als wahr bewiesen werden kann, dann kann "nicht A" es nicht)
- **Entscheidbarkeit**: jede Aussage sollte algorithmisch bewiesen werden können

(*"Wir können wissen. Wir werden wissen."*)

Kurt Gödel (1906-1978):

"Über formal unentscheidbare Sätze der "Principia Mathematica" und verwandter Systeme" (1931)

In jedem Axiomensystem, das reich genug ist, um $\mathbb{N}$ und Rechnen in $\mathbb{N}$ zu beschreiben, gilt:

- Wenn das System widerspruchsfrei ist, ist es nicht vollständig. (Also entweder **Vollständigkeit** oder **Widerspruchsfreiheit**, aber nicht beide)
- Innerhalb des Systems kann Widerspruchsfreiheit nicht bewiesen werden. Das heißt, **Vollständigkeit** in einem engeren Sinn ist unmöglich. (Um Widerspruchsfreiheit eines Systems A zu zeigen, muss das in einem umfangreicheren System B geschehen. Dessen Widerspruchsfreiheit kann nur in einem umfangreicheren System C gezeigt werden usw...)

Letztlich ist die Idee sehr einfach.

Satz: Dieser Satz ist nicht beweisbar.

Gödels Leistung liegt darin, diesen Satz allein mit Hilfe der Axiome für $\mathbb{N}$ und Rechnen in $\mathbb{N}$ zu formulieren.

Dazu nummeriert er einfach alle Zeichen durch:

"0"=1, "Nachfolger"=3, "nicht"=5, "oder"=7, "für alle"=9, "("=11, ")"=13...

Grobes Vorgehen: Damit entspricht jede Aussage einer Zahl. Auch jeder Beweis entspricht einer Zahl. Damit kann man die "nicht beweisbaren" Sätze als Teilmenge von $\mathbb{N}$ ausdrücken. Damit kann man den Satz oben **ohne** Rekursion formulieren ("dieser Satz").

Das zeigt Theorem VI:

In jedem solchen Axiomensystem gibt es wahre Aussagen, die nicht innerhalb des Systems bewiesen werden können

Außerdem zeigt er in Theorem XI:

Die Aussage, dass das Axiomensystem widerspruchsfrei ist, ist innerhalb des Axiomensystems nicht beweisbar (falls sie wahr ist).

Wenn man weiter drüber nachdenkt, erledigt das auch Entscheidbarkeit. Dazu muss man nur noch definieren, was "algorithmisch" heißt. Dazu gleich mehr.

Gödel erledigt damit Hilberts Problem Nr 2:

"Sind die Axiome der Arithmetik widerspruchsfrei?"

Vage formuliert. Vielleicht sind sie es. Aber Gödel zeigt:

Das kann man innerhalb dieser Axiome nicht beweisen.

Außerdem zeigt Gödel 1940 (nach Emigration in die USA, Institute of Advanced Studies in Princeton) folgendes.

Recall: Hilberts Problem 1: Die **Kontinuumshypothese**:
Gibt es eine Menge M mit $|\mathbb{N}| < |M| < |\mathbb{R}|$?

Vielleicht.

Die heutigen Standardaxiomen für Mengenlehre: die **Zermelo–Fraenkel-Axiome**. Wegen Gödel wissen wir, dass die nicht vollständig und widerspruchsfrei sein können. Ist aber empirisch das beste, was wir haben.

Gödel zeigt 1940:

In den ZF-Axiomen lässt sich die Kontinuumshypothese nicht widerlegen.

Paul Cohen zeigt 1963:

In den ZF-Axiomen lässt sich die Kontinuumshypothese nicht beweisen.

Die Kontinuumshypothese kann man also als zusätzliches Axiom fordern, oder auch nicht. (Heute nimmt man stattdessen meist das schwächere *Auswahlaxiom* hinzu.)

Gödel ist Legende (mehr dazu auf Wikipedia und den Referenzen dort). Nur 29 Treffer auf `zbmath.org`, darunter

- Gesammelte Werke 1 bis 6
- Zwei Nachdrucke
- Zweimal "Unpublished Essays"
- Drei Übersetzungen
- insgesamt 9 Fachartikel