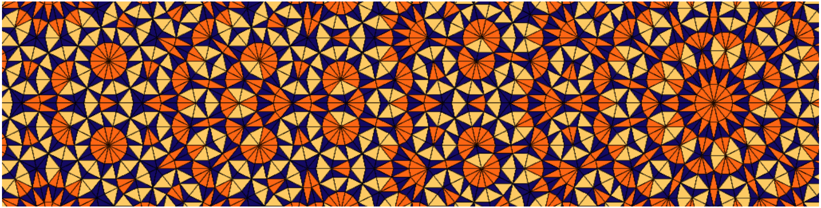
Panorama der Mathematik und Informatik

15: Zelluläre Automaten II

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät / Richtig Einsteigen

28.5.2015



[Demo: Golly: Gezeigt und erklärt werden u.a.:]

Conway's Game Of Life (GoL)

- Regeln
- Still lifes, oscillators, spaceships, Methusalems
- Gibt es Muster, die immer weiter wachsen? (bzgl. Zahl der jemals lebendigen Zellen, Zahl der aktuell lebendigen Zellen, quadratisches Wachstum der letzteren, ...)
- Guns, puffers, rakes, breeders
- NOT, OR, AND: logische Schaltkreise (!)

Siehe Wikipedia, oder (zum 40.Geburtstag von GoL):

A. Adamatzky (ed.): *Game of Life - Cellular Automata*, Springer 2010

Conway fragte z.B.:

- Gibt es ein Muster, das unendlich wächst? (bzgl. Anzahl der lebendigen Zellen)
    - Ja: Glider gun.
    - Ja, sogar Zahl der Zellen quadratisch bzgl. Zeit: Breeder (z.B. Puffer-Puffer, oder Glider-Gun-Puffer)
- Gibt es eine Waise / ein Garten-Eden-Muster?
- Gibt es selbstreproduzierende Muster? ("Life")

Garten Eden

Eine **Waise** (bzw ein **Garten-Eden-Muster**) im GoL ist ein endliches (bzw unendliches) Muster, das keinen Vorgänger hat.

Garten-Eden-Theorem (E.F. Moore 1962, J. Mayhill 1963):
In einem beliebigen zellulären Automaten gibt es ein Garten-Eden-Muster genau dann, wenn es zwei verschiedene endliche Muster gibt, die im nächsten Schritt identisch aussehen.

Daraus folgt: In GoL gibt es Garten-Eden-Muster. Denn:

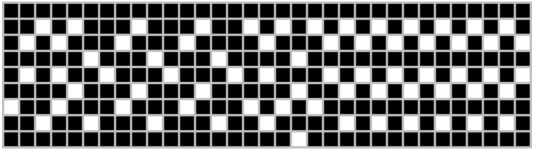
□□□ und □□□ □

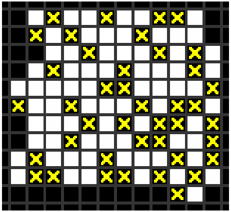
sehen im nächsten Schritt gleich aus. Das ist viel leichter zu finden als ein Garten-Eden-Muster!

"Nichts ist praktischer als eine gute Theorie."

Der Satz sagt nur “es gibt”, er sagt nichts darüber, wie’s aussieht (ob’s z.B. endlich ist; er sagt also auch nix über Waisen).

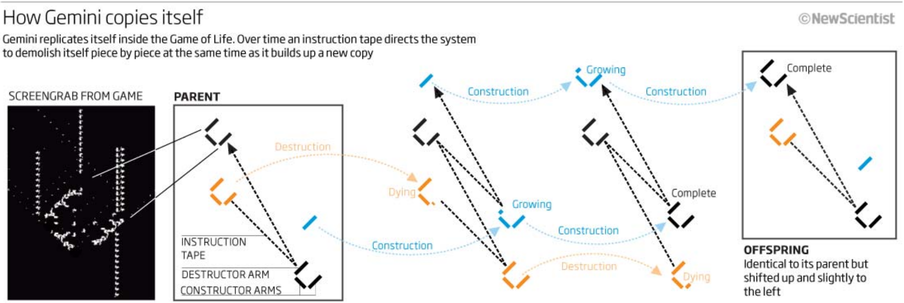
Dennoch gibt’s konkrete Waisen / Garten-Eden-Muster:





(R.Banks 1971 / Achim Flammenkamp, Bielefeld)

Selbstreplizierende Muster

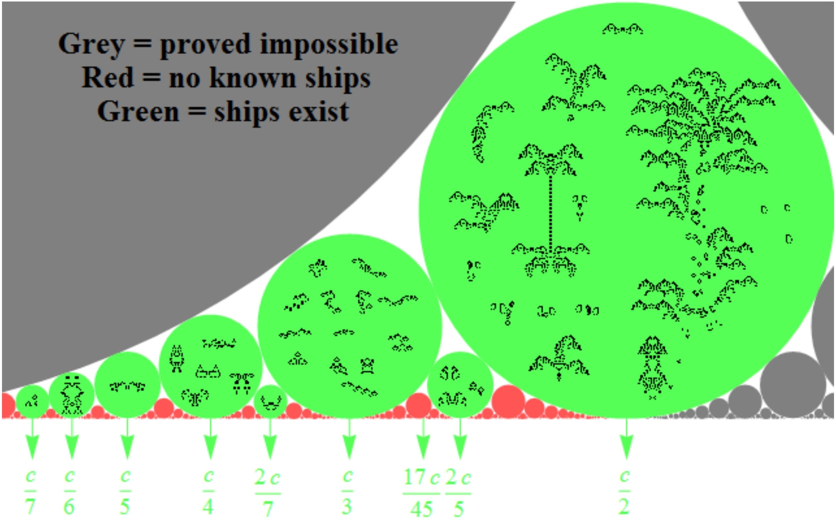


www.youtube.com/watch?v=A8B5MbHPlH0

Andere Frage: Wie schnell können spaceships in GoL reisen? Schnellstmögliche Geschindigkeit: 1 Zelle pro Zeittakt (= "Lichtgeschwindigkeit" c).

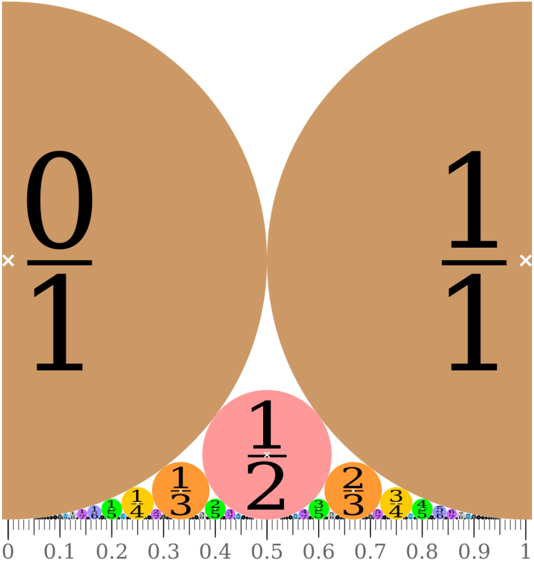
Wir sahen: "glider" hat Geschwindigkeit $\frac{c}{4}$. "lightweight spaceship": $\frac{c}{2}$.

(Glider fliegt diagonal, aber es wird nur senkrechte/waagerechte Geschwindigkeit gemessen)



(www.pentadecathlon.com/lifenews/spaceships)

Darstellung im Schema oben: Ford-Kreise



Schneller als $\frac{c}{2}$ geht also nicht.

Aber: Es gibt "Wurmlöcher": Stargate
`www.youtube.com/watch?v=28vxPvTDh4E`

Zurück zu eindimensionalen zellulären Automaten.

Elementare zelluläre Automaten

Spezielle zelluläre Automaten: *elementare zelluläre Automaten*

- Eindimensional
- Nur zwei Zustände: 0 und 1
- Neuer Zustand der Zelle b_i hängt nur von b_{i-1}, b_i, b_{i+1} ab

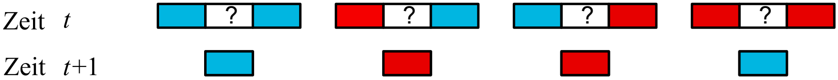
Damit können alle Regeln in einer simplen Tabelle erfasst werden:

Aktuelle Zustände	111	110	101	100	011	010	001	000
Neuer Zustand mittlere Z.	1	0	0	0	1	0	0	1

Kurz: Regel $137 = (10001001)_2$.

Stephan Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media 2002

Oder Bsp von oben: Zwei Zustände, blau (=0), rot (=1). Regel:



Aktuelle Zustände	111	110	101	100	011	010	001	000
Neuer Zustand mittlere Z.	0	1	0	1	1	0	1	0

Kurz: Regel $(01011010)_2 = 90$

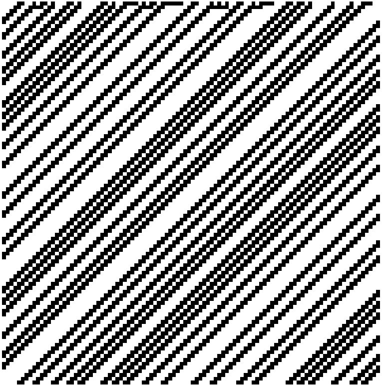
[Zeigen: Wolfram alpha; rule 90, rule 137]

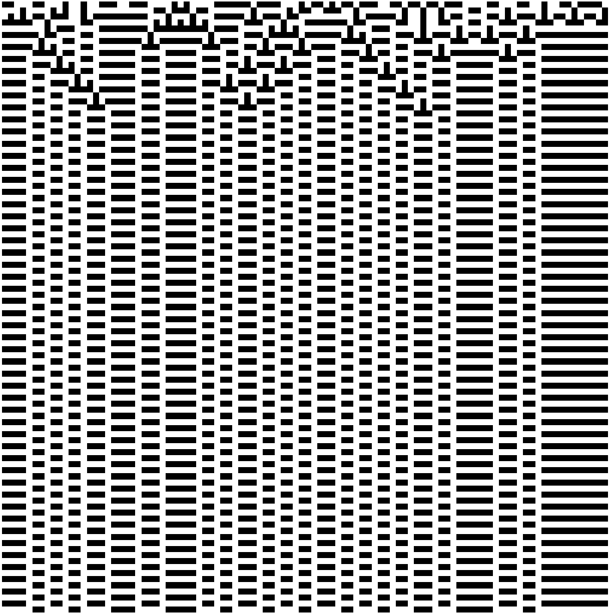
Wolframs Klasseneinteilung...

...für elementare zelluläre Automaten:

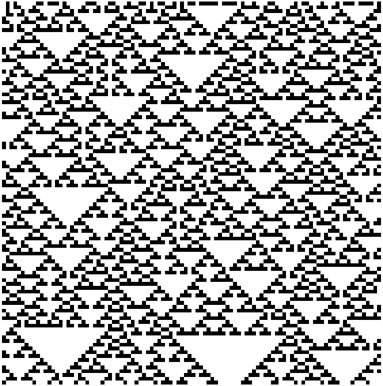
- **Klasse 1**: Fast alle Anfangsmuster liefern schnell denselben räumlich homogenen Zustand. Jede Zufälligkeit im Ausgangsmuster wird rausgefiltert. Änderungen im Ausgangsmuster bewirken gar keine Änderungen im Endzustand.

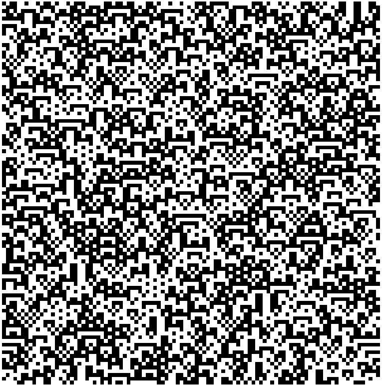

- **Klasse 2**: Fast alle Anfangsmuster liefern schnell einen stabilen oder oszillierenden Zustand. Etwas Zufälligkeit im Anfangsmuster wird rausgefiltert, einiges verbleibt. Kleine Änderungen im Ausgangsmuster bewirken kleine Änderungen im stabilen Zustand.



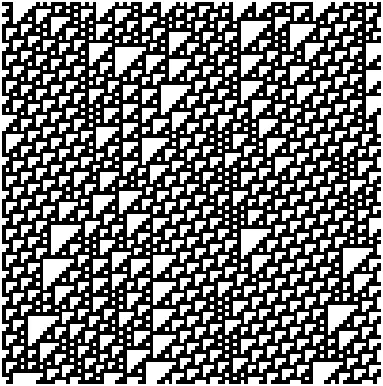


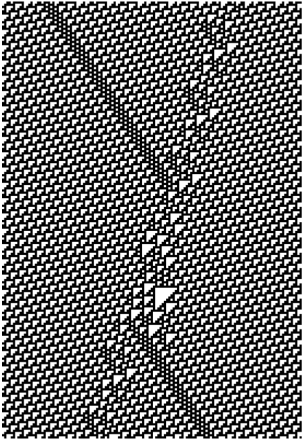
- **Klasse 3**: Fast alle Anfangsmuster liefern eine chaotische Folge von Zuständen. Jedes endliche stabile Muster wird vom umgebenden Chaos zerstört. Kleine Änderungen im Ausgangsmuster bewirken Änderungen, die sich immer weiter ausbreiten.

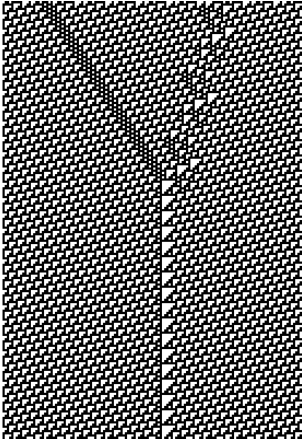




- **Klasse 4**: Fast alle Anfangsmuster entwickeln sich zu Mustern mit komplexer Interaktion. Lokale Muster können lange überleben. Es können sich Klasse-2-Endmuster bilden, aber erst nach langer Zeit. Kleine Änderungen im Ausgangsmuster können sich unendlich ausbreiten.







Letztes Bild: Regel 110.

Matthew Cook zeigte ca. im Jahr 2000, dass Regel 110 turingvollständig ist.

Also so mächtig wie eine Turingmaschine, also so mächtig wie eine Registermaschine, ...

...und wurde verklagt. Wolfram behinderte zwei Jahre lang die Publikation.

Der Beweis benutzt die Existenz von Gleitern, der Möglichkeit, Information zu transportieren und zu speichern...

...und zeigt die Äquivalenz von Regel 110 mit einem als turingvollständig bekannten Modell ("cyclic tag system")

Frage: In welche Klasse fällt Conway's Game of Life?

Auch kurz angesprochen (s. Video):

- Langton's ant, Turmiten, von Neumann-Automat
- Zählfolgen und erzeugende Funktionen zu den Regeln