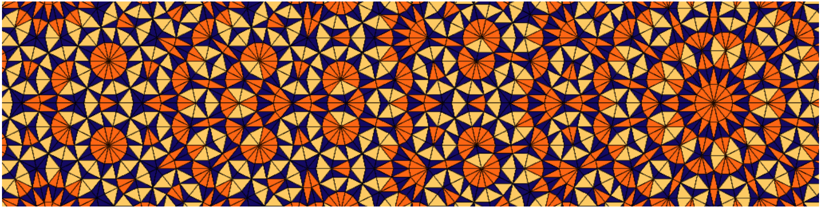
Panorama der Mathematik und Informatik

21: π

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät / Richtig Einsteigen

23.6.2015



Recall:

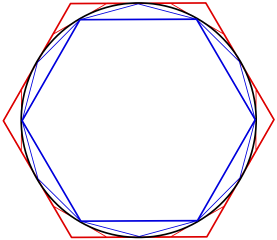
- Umfang eines Kreises mit Radius 1 ist 2π.
- Fläche eines Kreises mit Radius 1 ist π.
- Oberfläche einer Kugel mit Radius 1: 4π.
- Volumen einer Kugel mit Radius 1: $\frac{4}{3}\pi$.

Dim.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$2n$	$2n+1$
Vol.	2	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{8\pi^2}{15}$	$\frac{\pi^3}{6}$	$\frac{16\pi^3}{105}$	$\frac{\pi^4}{24}$	$\frac{32\pi^4}{945}$	$\frac{\pi^5}{120}$	$\frac{\pi^n}{n!}$	$\frac{2^{n+1}\pi^n}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$
Obfl.	2	2π	4π	$2\pi^2$	$\frac{8\pi^2}{3}$	π^3	$\frac{16\pi^3}{15}$	$\frac{\pi^4}{3}$	$\frac{32\pi^4}{105}$	$\frac{\pi^5}{12}$	$\frac{2\pi^n}{(n-1)!}$	$\frac{2^{n+1}\pi^n}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$

$\pi =$ 3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971
6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825
3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172
5359408128 4811174502 8410270193 8521105559 6446229489
5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165
2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726
0249141273 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540
9171536436 7892590360 0113305305 4882046652 1384146951
9415116094 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179
3105118548 0744623799 6274956735 1885752724 8912279381
8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737
1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846
7669405132 0005681271 4526356082 7785771342 7577896091
7363717872 1468440901 2249534301 4654958537 1050792279
6892589235 4201995611 2129021960 8640344181 5981362977
4771309960 5187072113 4999999837 2978049951 0597317328
1609631859 5024459455 3469083026 4252230825 3344685035
2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717
7669147303 5982534904 2875546873 1159562863 8823537....

Wie berechnet man π?

- **Rekordhalter**: In der Antike Archimedes von Syrakus (287-212 BC)
  Exhaustionsmethode: Ein- und Umschreibung mit n-Eck ($n = 6 \cdot 2^k$)



Archimedes:

(96-Eck) $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ (3 Dezimalstellen)

- Ptolemäus (87-165): $\pi = 3\frac{17}{120} = 3,1417$.
- Chinesische Abschätzungen durch u.a. Liu Hui (220-280) bzw. Zu Chongzhi (429?–500?) und Zu Kengzhi: Einbeschreibung von $6 \cdot 2^n$-Eck

Zu Chongzhi, $n = 6 \cdot 2^{12}$:

$3,1415926 < \pi < 3,1415927$, bzw $\pi \approx 355/113$ (7 Dezimalstellen)

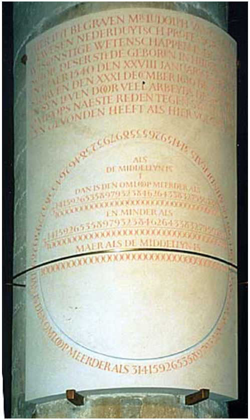
Wie berechnet man π?

- Bis ins 16. Jahrhundert: gleiche Methode, bis zu 15 Stellen

Ludolph Van Ceulen (1540-1610)

35 Stellen von π, mit einem 2^{62}-Eck (jahrzehntelange Rechnung)
Daneben gab es auch viele schlechte Werte:

- 3 (u.a. Bibel)
- $3\frac{1}{8}$ (Rom; aus praktischen Gründen?)
- Brahmagupta (Indien, 7. Jh.): $\sqrt{10} = 3.162\ldots$
- $\pi = \sqrt{10}$ war in ganz Asien in Gebrauch (China, Arabien). Al Chorezmi nennt $3\frac{1}{7}, \sqrt{10}$ und $\frac{62832}{20000}$.



Wie berechnet man π?

Neue Idee im 16. Jahrhundert: **unendliche Reihen** und Produkte.

François Viète (1540-1603)

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

(ca. 1579, durch die Flächen der immer kleineren Dreiecke. Berechnete daneben auch mit der Exhaustionsmethode $\pi = 3,141592653\ldots$ (10 Dezimalstellen) mittels eines $6 \cdot 2^{13}$-Ecks)

John Wallis (1616-1703)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$$

(ca. 1650, durch Auffüllen mit immer kleineren Rechtecken)

Wie berechnet man π?

William Brouncker (ca. 1650 aus Wallis' Formel)

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1}{2+\frac{9}{2+\frac{25}{2+\cdots}}}}$$

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1672, aus arctan-Reihe, s.u.)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Leonhard Euler (1707-1783) Etliche Formeln, z.B.

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} + \cdots$$

Wallis Formel

$$\text{Hoc est, } \square \begin{cases} \text{minor quam } \dfrac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 4\times 4\times 6}\sqrt{1\tfrac{1}{5}}. \\[2ex] \text{major quam } \dfrac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 4\times 4\times 6}\sqrt{1\tfrac{1}{6}}. \end{cases}$$

Et (continuata ejusmodi operatione juxta Tabellæ leges) invenietur

$$\square \begin{cases} \text{minor quam } \dfrac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9\times 9\times 11\times 11\times 13\times 13}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8\times 10\times 10\times 12\times 12\times 14}\times\sqrt{1\tfrac{1}{13}}. \\[2ex] \text{major quam } \dfrac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9\times 9\times 11\times 11\times 13\times 13}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8\times 10\times 10\times 12\times 12\times 14}\times\sqrt{1\tfrac{1}{14}}. \end{cases}$$

Et sic deinceps quousq; libet. Ita nempe ut fractionis Numerator fiat continue multiplicando numeros impares 3, 5, 7, &c. bis positos; Denominator vero, continue multiplicando numeros pares, 2, 4, 6, &c, bis item positos, exceptis primo & ultimo, qui semel ponuntur: Et tota deniq; ratio seu fractio, sic facta, ducatur in Radicem-quadraticam Unitatis aliquotâ-parte sui auctæ; eâ nempe quæ denominatorem habet eum qui est ultimus numerorum, continue multiplicatorum, imparium, si quæramus numerum justo majorem, vel parium, si justo minorem.

(Aus: John Wallis, *Arithmetica Infinitorum*)

James Gregory (1639-1675): (Gregory-Leibniz-Formel)

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Heute: Taylorreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$. Also mit

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \arctan''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \arctan'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}, \ldots$$

$$\arctan(x) = \arctan(0)\frac{1}{1} + \frac{1}{1+0^2}x + \frac{-0}{(1+0^2)^2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{6 \cdot 0^2 - 2}{(1+0^2)^3} \cdot \frac{x^3}{6} + \cdots$$

Da $\tan(\pi/4) = 1$ ist $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. ($x = 1$ einsetzen).
Unklar, ob Gregory damit π berechnet hat; Leibniz hat die Reihe unabhängig gefunden und diese Formel als Spezialfall notiert.

Zum Berechnen von π ist das nicht gut (s. Übungsblatt 12). 300 Summanden liefern z.B. nur 2 korrekte Dezimalstellen: $\pi = 3,13...$

Mittels der unendlichen Reihen kann π nun effizienter berechnet werden. Gregory-Leibniz-Formel zwar nicht gut, aber Trick (**John Machin**, 1699, s. Übungsblatt 12):

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Also Gregory-Leibniz-Formel für $x = \frac{1}{5}$ und $x = \frac{1}{239}$ benutzen.

Vorteil: Nenner wächst viel schneller, Reihe konvergiert schneller gegen π. (Und: "Mal 5" ist einfach von Hand zu rechnen)

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

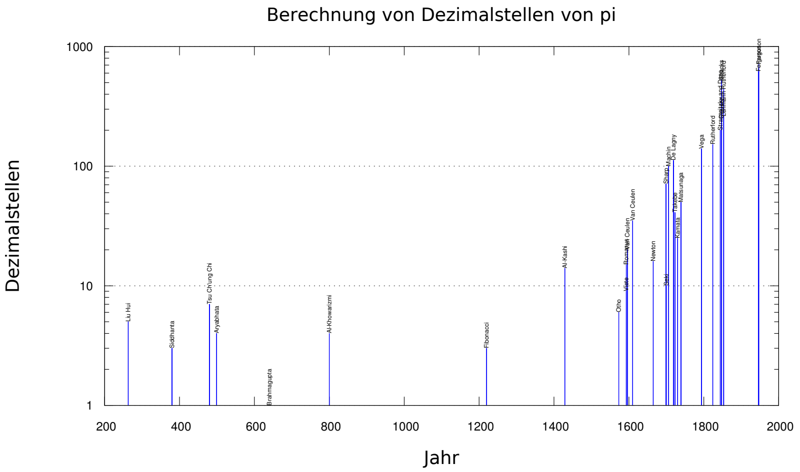
$$\arctan \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots$$

$$\arctan \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{x^7}{7 \cdot 239^7} + \cdots$$

Damit waren nun weitere Rekorde möglich.

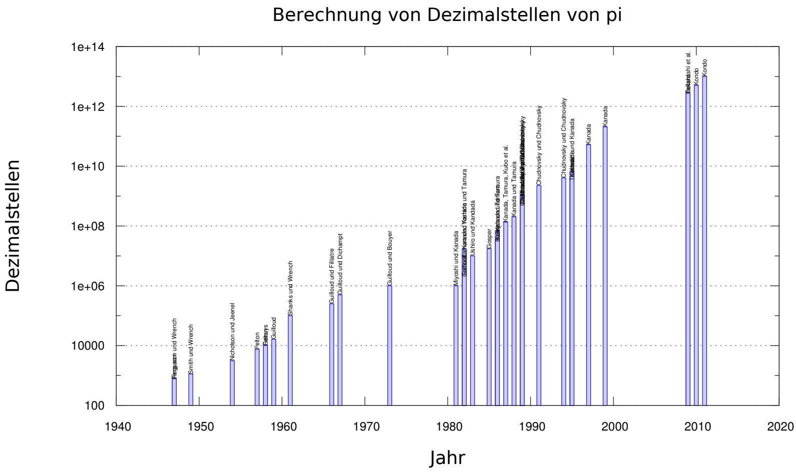
	Exhaustionsmethode:	
Um 2000 v.Chr.	Babylonien	$\pi = 3\frac{1}{8} = 3,25$
Um 2000 v.Chr.	Ägypten (Rhind-Papyrus)	$\pi = \frac{256}{81} = 3,1605$
um 250 v.Chr.	Archimedes (Hellas)	$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, $\pi = 3,14...$
1 Jh. n.Chr.	Ptolemäus (Hellas)	$\pi = 3\frac{17}{120} = 3,141....$
ca 450	Zu Chongzhi (China)	$\pi \approx \frac{355}{113} = 3,1415926...$
1220	Leonardo von Pisa (I)	$\pi = 3,141...$
ca 1400	Mas'ud al-Kaschi (Iran)	$\pi = 3,1415926535897932...$
1610	Ludolph van Ceulen (NL)	(35 Stellen)
	Unendliche Reihen:	
1593	Francois Viète	Unendliches Produkt (mit $\sqrt{}$)
1655	John Wallis	Unendliches Produkt (in $\mathbb{Q}$)
1665	Isaac Newton	16 Dezimalstellen
1671	James Gregory	arctan-Reihe
1674	G.W. Leibniz	auch
1699	Abraham Sharp	72 Dezimalstellen
1706	John Machin	100 Dezimalstellen
1755	Leonhard Euler	viele Reihen, u.a. schnell konv.

Wie berechnet man π?



	Unendliche Reihen	
1794	Georg Vega (A)	140 Dezimalstellen
1841	William Rutherford (UK)	208 Dezimalstellen
1847	Thomas Clausen (DK)	248 Dezimalstellen
1853	William Rutherford	440 Dezimalstellen
1855	... Richter (?)	500 Dezimalstellen
1874	William Shanks (UK)	707 Dezimalstellen (davon 526 korrekt)
1945	D.F. Ferguson (UK)	korrigiert Shanks
1947	D.F. Ferguson	808 Dezimalstellen (mechanische Rechenmaschine)
	Computer	
1949	ENIAC (USA)	2037 Stellen
1959	NORC (F)	16 167 Stellen
1961	IBM 7090 (USA)	100 200 Stellen
1967	CDC 660 (Paris)	500 000 Stellen
1971	CDC 7600 (Paris)	1 000 000 Stellen
1983	Kanada, Tamura (J)	16 000 000 Stellen
1988	Kanada (J)	201 326 000 Stellen
1989-98	(Kanada vs Chudnovsky brothers)	bis 51 500 000 000 Stellen

Wie berechnet man π?



Mittlerweile jährlich neue Rekorde. Heute meist auf Heimcomputer(-netze)n.

Problem: Verifizierung! Man muss zwei verschiedene Algorithmen benutzen, Ergebnisse müssen übereinstimmen.

Aktueller Rekord vom 8.10.2014: 13 300 000 000 000 Stellen. (208 Tage Rechenzeit).

Anderes Thema: Seit wann heißt π wirklich π?

Erstmals π

And $6a$, or $6 \times \overline{t - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^5}$, &c. $= \frac{1}{2}$ Periphery (π)

But $6 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, and $t^2 = \frac{1}{3}$; Let
$\alpha = 2\sqrt{3}, \beta = \frac{1}{3}\alpha, \gamma = \frac{1}{3}\beta, \delta = \frac{1}{3}\gamma$, &c.

Then $\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{5}\gamma - \frac{1}{7}\delta + \frac{1}{9}\varepsilon$, &c. $= \frac{1}{2}\pi$, or

$$\alpha - \frac{1}{3}\frac{3\alpha}{9} + \frac{1}{5}\frac{\alpha}{9} - \frac{1}{7}\frac{3\alpha}{9^2} + \frac{1}{9}\frac{\alpha}{9^2} - \frac{1}{11}\frac{3\alpha}{9^3} + \frac{1}{13}\frac{\alpha}{9^3}, \text{ \&c.}$$

Theref. *the* (*Radius is to* $\frac{1}{2}$ *Periphery, or*) *Diameter is to the Periphery, as* 1,000, &c. *to* 3.141592653.58979323 84.6264338327.9502884197.1693993751.0582097494.4592307816.4062862c89.9862803482.5342117067.9 +, True to above a 100 Places; as Computed by the Accurate and Ready Pen of the Truly Ingenious Mr. *John Machin*: Purely as an Inſtance of the Vaſt advan-

Jones, William, *Synopsis palmariorum matheseos, or, a new introduction to the mathematics*, London 1706

Modernere Formeln für π

Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

z.B.:

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}}$$

(ca. 1914)

Jon Borwein (*1951), Peter Borwein (*1953)

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(A+nB)}{(n!)^3 (3n)! C^{n+1/2)}}$$

mit

$$\begin{aligned} A &:= 212175710912\sqrt{61} + 1657145277365 \\ B &:= 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750 \\ C &:= (5280(236674 + 30303\sqrt{61}))^3 \end{aligned}$$

Jeder Term fügt etwa 31 Ziffern hinzu (1989)

Jon Borwein (*1951), Peter Borwein (*1953)

Sei $a_0 = 1/3$, $s_0 = (\sqrt{3} - 1)/2$. Iteriere:

$$r_{k+1} = \frac{3}{1 + 2(1 - s_k^3)^{(1/3)}}$$
$$s_{k+1} = \frac{r_{k+1} - 1}{2}$$
$$a_{k+1} = r_{k+1}^2 a_k - 3^k (r_{k+1}^2 - 1)$$

Dann konvergiert $1/a_k$ kubisch gegen π, also $\epsilon_{n+1} \leq C\epsilon_n^3$ mit $\epsilon_n := |\pi - x_n|$. (1991) D.h., Zahl der korrekten Stellen verdreifacht sich in jedem Schritt.

Die BBP-Formel

David Bailey (*1948), Peter Borwein (*1953),
Simon Plouffe (*1956)

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

(1996)

- $\rightsquigarrow$ Berechnung der *i*ten (hexadezimalen) Ziffer von π ohne die vorhergehenden zu kennen.

Rätselhaftes π

Andere **Fragen** wurden irgendwann wichtiger, z.B.:

- Ist π *rational*, d.h. $\pi \in \mathbb{Q}$?
  (d.h. gibt es $m, n \in \mathbb{N}$ so dass $\pi = \frac{n}{m}$?) Sonst heißt die Zahl *irrational*.
- Ist π *algebraisch*? D.h. ist π Nullstelle eines Polynoms $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$?
  Sonst heißt die Zahl *transzendent*.
- Ist π *normal*? D.h. tauchen alle Ziffernkombinationen in den Nachkommastellen von π gleich häufig auf?

Bsp.:

- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, Goldener Schnitt $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ ... alle irrational. Im antiken Griechenland bekannt. (Siehe Vorlesung 7.4. und Übungsblatt 1)
- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, Goldener Schnitt $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ sind aber alle algebraisch: $x^2 - 2$, $x^2 - 3$, $x^2 - x - 1$.
- $1 = 1,0000\cdots$ ist nicht normal. Naja, $1 \in \mathbb{Q}$.

Auch $1{,}1010001000000010000000000000001000\cdots$ ist nicht normal. (Sowie transzendent!) Aber diese Zahl ist extra so konstruiert, dass sie nicht normal ist.

Im Allg. ist es aber zu einer gegebenen irrationalen Zahl (wie e oder π) schwierig zu entscheiden, ob sie normal ist.

Von π weiß man nicht, ob es normal ist. (Egal in welcher Basis, binär, dezimal, hexadezimal...)

Statistische Tests der Ziffern in der Dezimaldarstellung (Kanada!) ergeben, dass sie wie Zufallszahlen aussehen. Könnte also normal sein.

π ist irrational

Beweise für "π ist irrational":

Johann Heinrich Lambert (1761) mittels

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}.$$

Charles Hermite (1873) Relativ einfacher Beweis, nur Analysis 1.

CLF von Lindemann (1882) indem er mittels Ergebnissen von Hermite zeigt, dass π sogar transzendent ist:

π ist transzendent

- Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939):
  - Hermite (1873): e^r ist transzendent für alle $0 \neq r \in \mathbb{Q}$ (Daher: e transzendent)
  - Lindemann (1882): $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ paarweise verschiedene algebraische Zahlen, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{Q}$; mindestens ein $\beta_i \neq 0$. Dann

$$\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0$$

  - Daher ist π transzendent. Denn:
  - i ist algebraisch: $x^2 + 1 = 0$.
  - Ist π algebraisch, dann auch $i\pi$.
  - Wähle $n = 2$, $\alpha_1 = i\pi$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Dann

$$0 \neq e^{i\pi} + e^0 = -1 + 1 = 0$$

  Widerspruch. Also π transzendent.

Offene Fragen:

Zum Beispiel:

- $e + \pi$ irrational?
- $e \cdot \pi$ irrational?
- π^π irrational?
- $\ln(\pi)$ irrational?
- ...
- dito für “transzendent”
- π normal in Basis 2,3,... ?