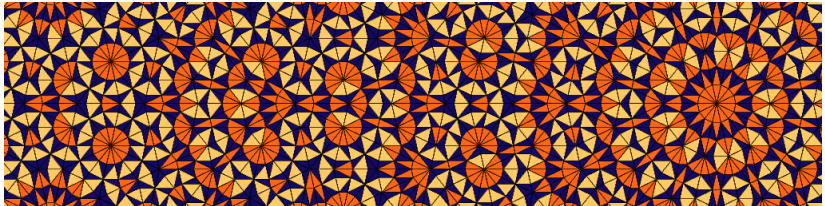


25: Aperiodische Pflasterungen

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät / Richtig Einsteigen

16.7.2015



Aperiodische Pflasterungen

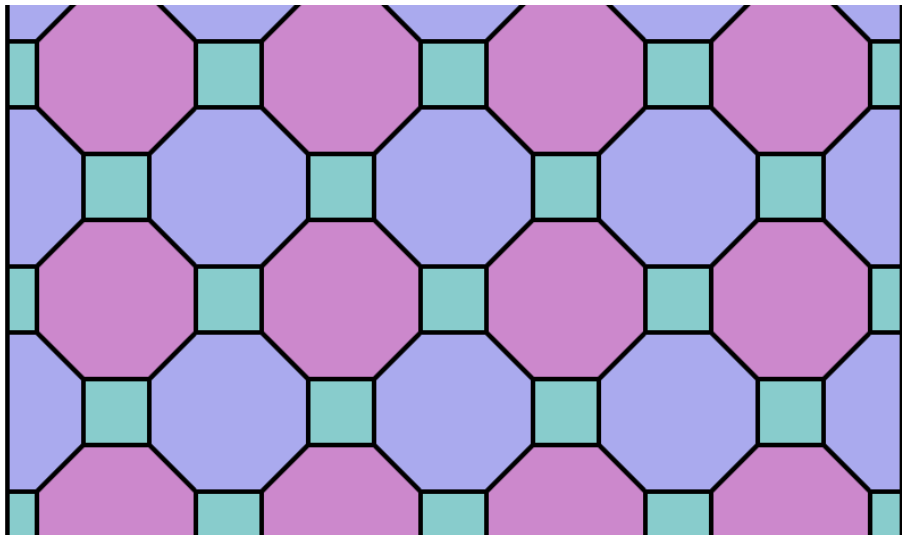
Ein Forschungsgebiet mit vielen Orten auf der Landkarte.

Diskrete Geometrie, Kombinatorik, Berechenbarkeit, Algebraische Topologie, math. Physik, Funktionalanalysis....

In Bielefeld: AG Michael Baake, Franz Gähler, ich. Was wird da erforscht?

(Im Folgenden auch englischer Text, sorry, das ist aus Folien recyclet, die ich auf Tagungen gezeigt habe)

Pflasterungen



Pflasterungen

Pflasterungen (oder *Parkettierungen*, engl. "*tilings*"=Kachelungen) bestehen aus **Steinen** ("*tiles*"), die sich nicht überlappen und die die Ebene \mathbb{R}^2 komplett bedecken. (!)

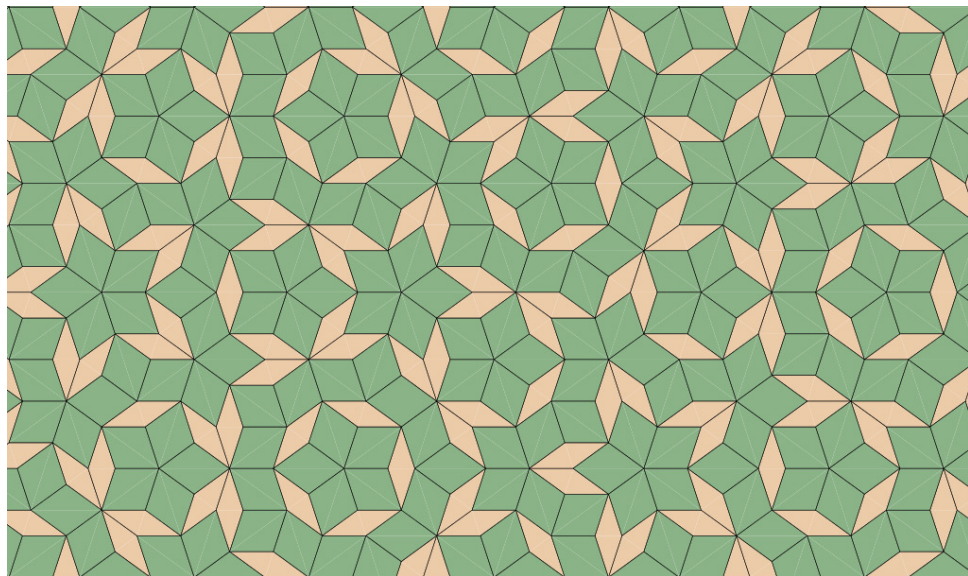
Die Farben im letzten Bild sind dabei irrelevant. Das letzte Bild zeigt eine **periodische** Pflasterung, d.h. man kann die Pflasterung verschieben (hier z.B. um eine Achtecksbreite nach rechts oben) und das Resultat ist dasselbe wie die ursprüngliche Pflasterung. (Dazu ist wichtig, dass die Pflasterung unendlich ist.)

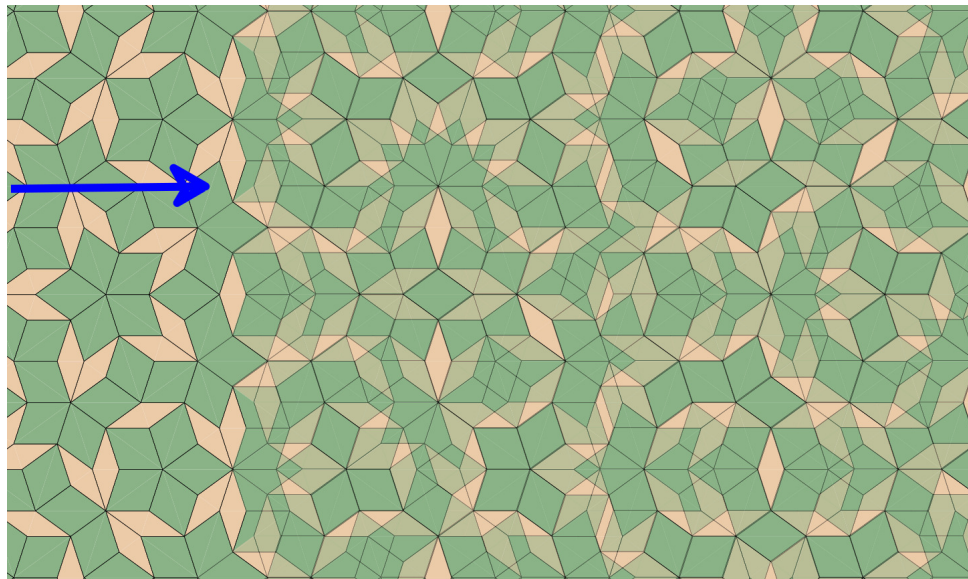
Pflasterungen

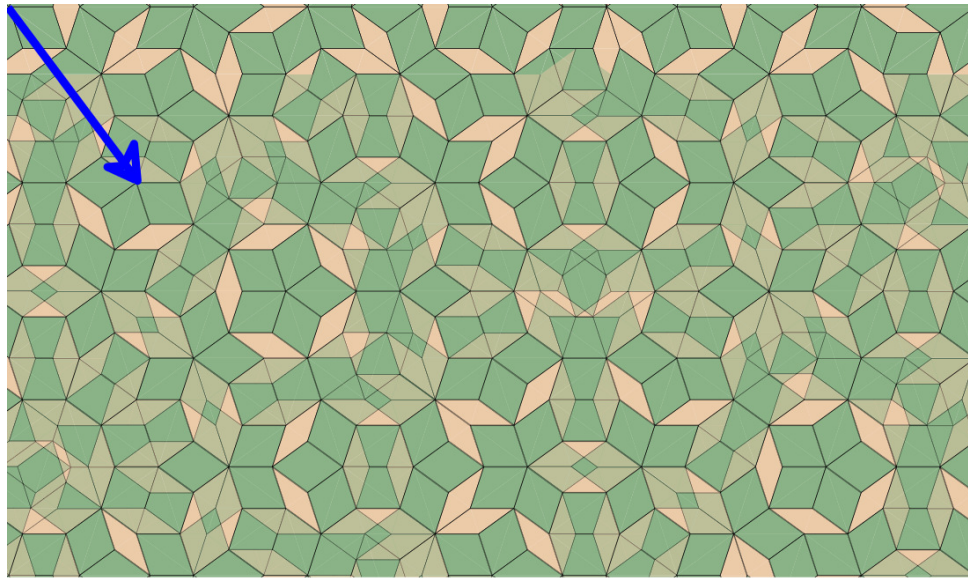
Pflasterungen (oder *Parkettierungen*, engl. "*tilings*"=Kachelungen) bestehen aus **Steinen** ("*tiles*"), die sich nicht überlappen und die die Ebene \mathbb{R}^2 komplett bedecken. (!)

Die Farben im letzten Bild sind dabei irrelevant. Das letzte Bild zeigt eine **periodische** Pflasterung, d.h. man kann die Pflasterung verschieben (hier z.B. um eine Achtecksbreite nach rechts oben) und das Resultat ist dasselbe wie die ursprüngliche Pflasterung. (Dazu ist wichtig, dass die Pflasterung unendlich ist.)

Viele (regelmäßige) Pflasterungen sind periodisch. Die nächste Folie zeigt eine nichtperiodische Pflasterung, die **Penrose-Pflasterung**. (Das Verschieben ist auf der übernächsten und überübernächsten Folie durch eine darübergelegte verschobene halbtransparente Kopie angedeutet. Man sieht, dass die verschobene Kopie mit der ursprünglichen nicht komplett zur Deckung kommt.)

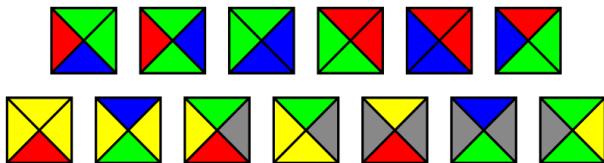






Frage (Hao Wang 1961): Gegeben ein Satz von Steinen. Gibt es einen Algorithmus, der entscheidet, ob Kopien dieser Steine eine Pflasterung der Ebene \mathbb{R}^2 erlauben?

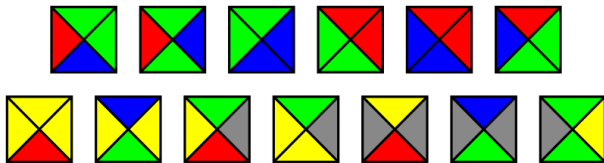
Evtl. mit einschränkenden Legeregeln. Z.B: ("Wang-Tiles")



Legeregel: Nur Ecke an Ecke legen, und die Farbe an aneinanderstoßenden Kanten muss passen.

Frage (Hao Wang 1961): Gegeben ein Satz von Steinen. Gibt es einen Algorithmus, der entscheidet, ob Kopien dieser Steine eine Pflasterung der Ebene \mathbb{R}^2 erlauben?

Evtl. mit einschränkenden Legeregeln. Z.B: ("Wang-Tiles")



Legeregel: Nur Ecke an Ecke legen, und die Farbe an aneinanderstoßenden Kanten muss passen.

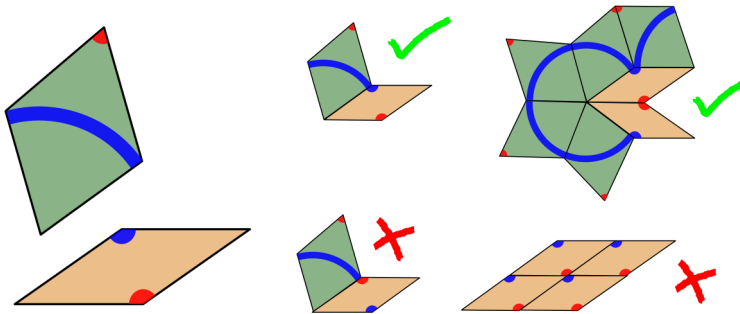
Vermutung: (Wang) Jeder Steinsatz, der eine Pflasterung der Ebene erlaubt, erlaubt auch eine periodische Pflasterung der Ebene.

Satz (Wang) Falls die Vermutung stimmt, ist das Problem algorithmisch entscheidbar.

Satz (Wang) Falls die Vermutung stimmt, ist das Problem algorithmisch entscheidbar.

Jedoch: Berger fand 1966 einen Steinsatz aus Wang-Tiles, der nur nichtperiodische Pflasterungen erlaubt.

Roger Penrose fand ca 1972 einen sehr eleganten Steinsatz (keine Wang-Tiles), der nur nichtperiodische Pflasterungen erlaubt. In seiner einfachsten Form:



Zwei Steine mit blauen und roten Markierungen, Regel: blau an blau, rot an rot. Liefert nur nichtperiodische Pflasterungen!

Das ist die schwierige Möglichkeit, nichtperiodische Pflasterungen zu erzeugen. Die einfache: Steinsubstitutionen!

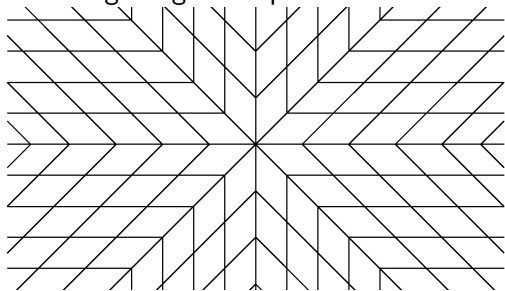
An dieser Stelle: **nichtperiodisch** heißt, keine Verschiebung lässt die Pflasterung unverändert.

Das ist die schwierige Möglichkeit, nichtperiodische Pflasterungen zu erzeugen. Die einfache: Steinsubstitutionen!

An dieser Stelle: **nichtperiodisch** heißt, keine Verschiebung lässt die Pflasterung unverändert.

Aperiodisch heißt ein bisschen mehr. Nämlich nichtperiodisch und (sehr grob gesprochen) "sieht überall gleich aus".

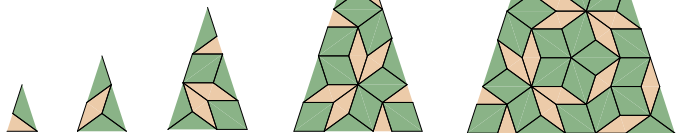
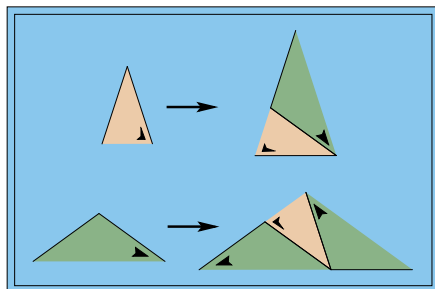
Eine langweilige nichtperiodische Pflasterung:



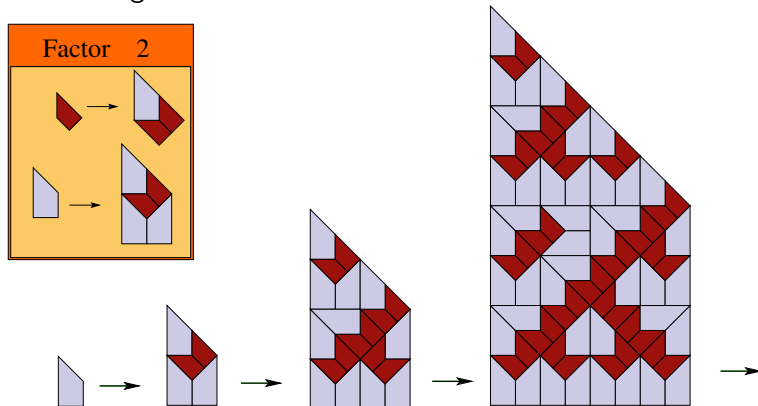
Die ist nichtperiodisch, aber nicht aperiodisch. Grob: der zentrale Stern aus 8 Rhomben taucht woanders nie wieder auf.

Substitution tilings:

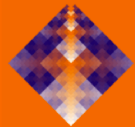
Substitutionsregel für eine Penrosepflasterung:



Es gibt viele weitere Substitutionsregeln für aperiodische Pflasterungen:



Ein Katalog davon hier: tilings.math.uni-bielefeld.de:



Tilings Encyclopedia

In rhombs, and wedges, and half-moons, and wings.

[Substitutions](#) | [Papers](#) | [People](#)

[Glossary](#) | [Help](#) | [Links](#)

Navigation

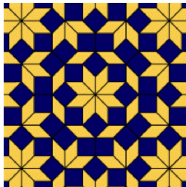
- [create content](#)
- [search](#)

The tilings encyclopedia, developed by [E. Harriss](#) and [D. Frettlöh](#) aims to become a useful reference for things tiling related. The first goal is to give a database of known substitution rules. We welcome all feedback.

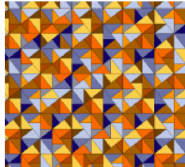
Navigation For the [complete list](#) of all present substitution rules, you can always click 'Substitutions' on top of the page, to the right. There is also a search engine to find certain terms on this site. For more detailed information click 'Help' on top of this page (right).

Here is a brief taste of the riches:

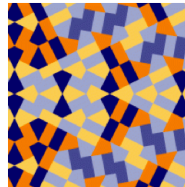
Ammann-Beenker



Coloured Golden Triangle



Kite-Domino



Navigation

- create content
- search

Home » Substitution Rules

Properties

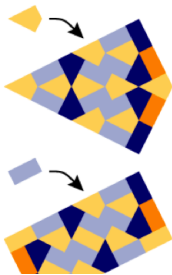
- **Known Matching Rules**
 - **With Decoration**
- **Local Complexity**
 - **Infinite Rotations**
 - **Finite Local Complexity**
- **Polytopal tiles**
- **Self-similar substitution**

MLD class

- **Pinwheel**

Kite-Domino

Discovered by [D. Frettlöh, M. Baake](#)



This is a variation of the **pinwheel** substitution. The kite-domino tilings are **mld** to the **pinwheel** tilings. The two **prototiles** are made of two pinwheel triangles, glued together at their long edge. There are two ways to do so, one gives a kite (a quadrilateral with edge lengths 1,1,2,2) and a domino (a rectangle with edge lengths 1,2,1,2). Then the substitution rule is obtained by considering two steps of the pinwheel substitution as one step. Thus, the **inflation factor** of the kite-domino tiling is 5.

This version was introduced in **[BFG07]**. It is useful to determine the frequency of any patch in the original **pinwheel** tiling. In particular, it was used in **[BFG07]** to obtain the frequency module of all point pairs, which turned out to be $1/264 \mathbf{Z}[1/5]$.

The **matching rules** for the pinwheel tiling, developed by C.Radin **[Rad94]**, can be used as matching rules for the kite domino tiling as well.

...und das Logo der Vorlesung:



ist auch eine aperiodische Substitutions-Pflasterung.

...und das Logo der Vorlesung:



ist auch eine aperiodische Substitutions-Pflasterung.

Warum ist das interessant:



...und das Logo der Vorlesung:
ist auch eine aperiodische Substitutions-Pflasterung.

Warum ist das interessant:

- ▶ Weil's Spaß macht



...und das Logo der Vorlesung:
ist auch eine aperiodische Substitutions-Pflasterung.

Warum ist das interessant:

- ▶ Weil's Spaß macht
- ▶ Interessante Spielweise für Experten in Ergodentheorie, Kohomologie, Algorithmen, Berechenbarkeit...

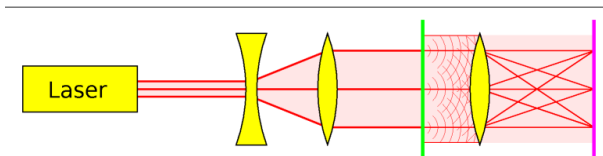


...und das Logo der Vorlesung:
ist auch eine aperiodische Substitutions-Pflasterung.

Warum ist das interessant:

- ▶ Weil's Spaß macht
- ▶ Interessante Spielwiese für Experten in Ergodentheorie, Kohomologie, Algorithmen, Berechenbarkeit...
- ▶ Quasikristalle! (1982/84)

Physical diffraction experiment:



Mathematical diffraction experiment:

- ▶ Tiling \rightsquigarrow discrete point set Λ .
- ▶ $\gamma_\Lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol } B_r} \sum_{x, y \in \Lambda \cap B_r} \delta_{x-y}$.
- ▶ Fouriertransform $\hat{\gamma}_\Lambda$ is the *diffraction spectrum*.

Since $\widehat{\gamma} := \widehat{\gamma}_\Lambda$ is again a measure, it decomposes into three parts:

$$\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}_{pp} + \widehat{\gamma}_{sc} + \widehat{\gamma}_{ac}$$

(pp: pure point, ac: absolutely continuous, sc: singular continuous)

Since $\widehat{\gamma} := \widehat{\gamma}_\Lambda$ is again a measure, it decomposes into three parts:

$$\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}_{pp} + \widehat{\gamma}_{sc} + \widehat{\gamma}_{ac}$$

(pp: pure point, ac: absolutely continuous, sc: singular continuous)

Ideal (perfect, infinite) crystals have pure point diffraction:

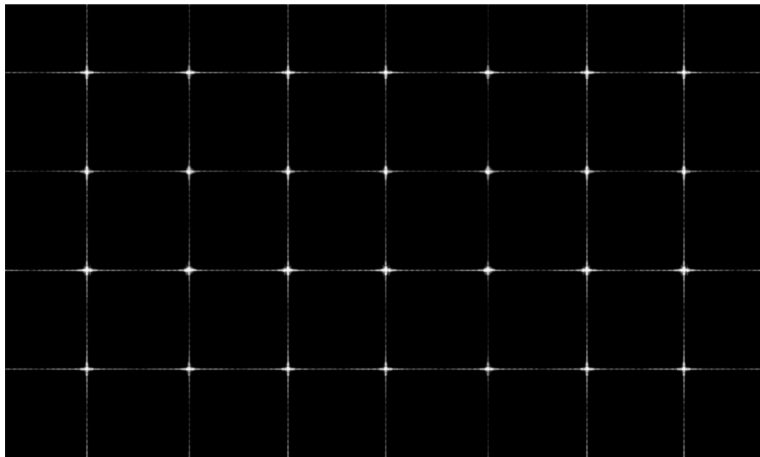
$$\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}_{pp} + \cancel{\widehat{\gamma}_{sc}} + \cancel{\widehat{\gamma}_{ac}}$$

Jede periodische Struktur hat reine Punktdiffraktion.

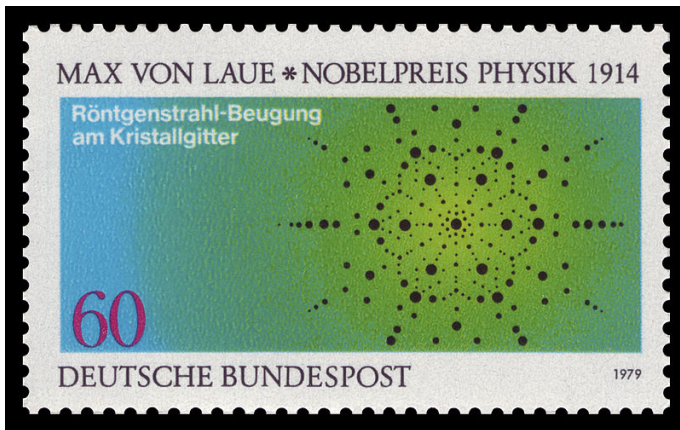
Und alle bisher beobachteten Strukturen mit reiner Punktdiffraktion (pure point diffraction) sind periodisch!

Die Definition eines Kristalls beinhaltet damals "periodisch sein".

Berechnen wir mathematisch die Diffraktion einer periodischen Pflasterung (eines math. "Kristalls"), sehen wir sowas:



Machen wir ein Experiment mit einem realen Kristall, sehen wir sowas:



Machen wir ein Experiment mit einem realen Kristall, sehen wir sowas:

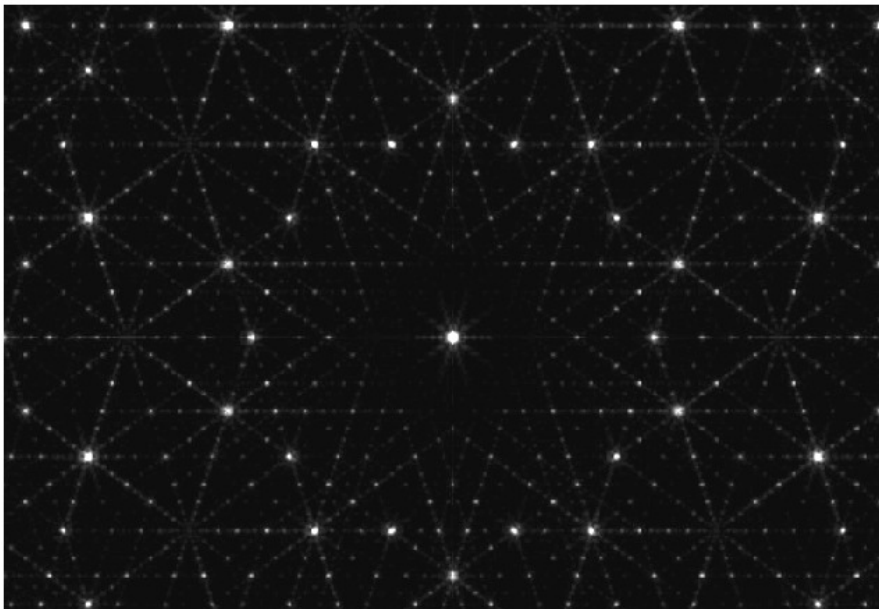


...naja, ohne die Briefmarke, nur das Muster.

Theorie liefert: periodische Strukturen (und ihre Diffraktionsmuster) können drehsymmetrisch sein, aber es ist nur 2-fache, 3-fache, 4-fache oder 6-fache Symmetrie möglich.

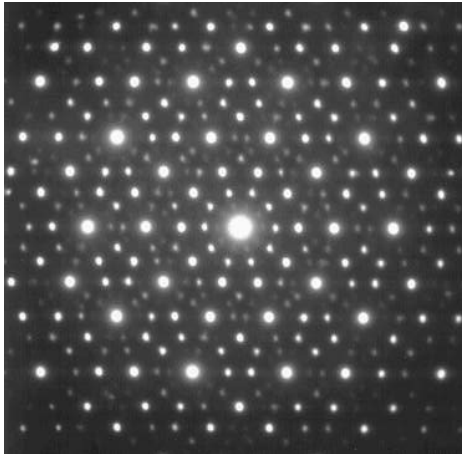
Fakt: 5-fache, 7-fache oder 10-fache Drehsymmetrie kann in einem Beugungsmuster eines periodischen Musters nicht vorkommen.

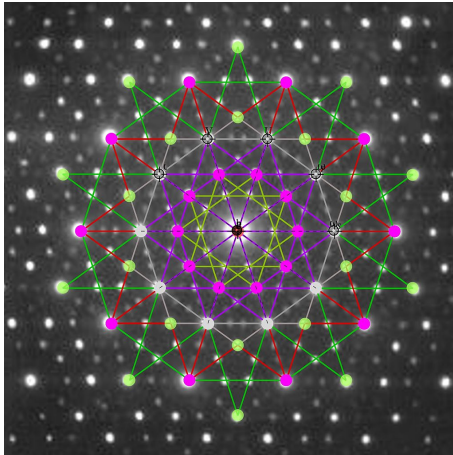
Falls wir z.B. das Diffraktionsmuster einer Penrosepflasterung ausrechnen, sehen wir auch pure point diffraction:



Und wir sehen 10-fache Symmetrie. Also muss die Penrosepflasterung nichtperiodisch sein.

1982 beobachtete Daniel Shechtman bei einer (realen metallischen) Probe folgendes Diffraktionsmuster (in etwa so eins, dieses Bild ist neuer):

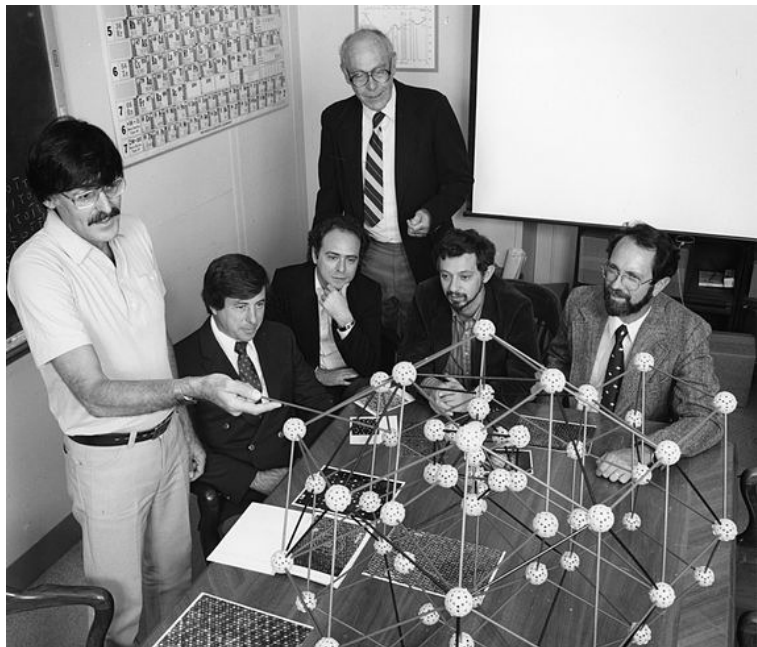




Reines Punktmuster! Sollte also ein Kristall sein. Alle bekannten Kristalle sind periodisch.

10-fache Symmetrie: kann kein Kristall sein!

Quasicrystal diffraction: Nobel Prize 2011 Daniel Shechtman

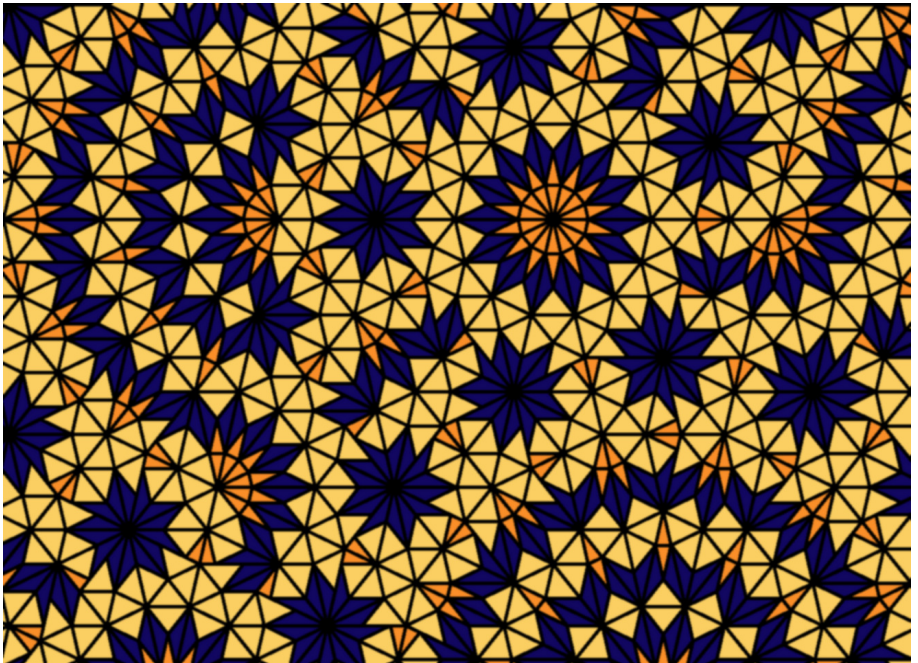


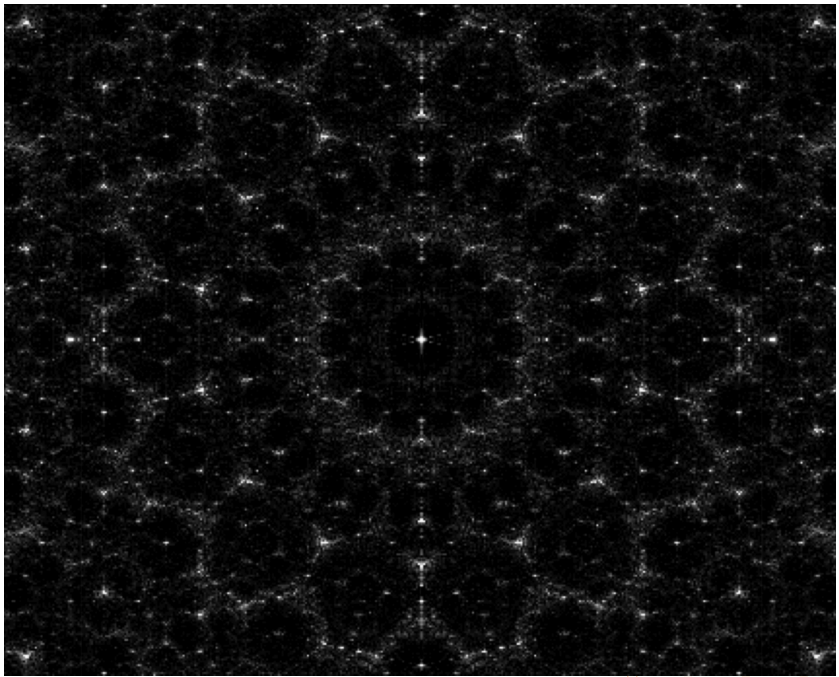
Das Gebiet erlebte nach 1984 einen Schub: eine neue Klasse von Festkörpern!

Es entwickelt sich eine math. Theorie dazu:

M.Baake, U.Grimm: *Aperiodic Order*, Cambridge Univ. Press 2013

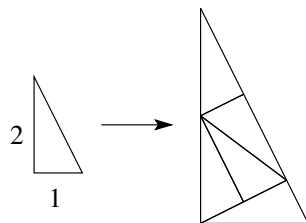
In dem Feld arbeite(te) ich auch lange. Z.B. Diffraktion einer aperiodischen 7-zähligen Pflasterung (keine pure point diffraction)





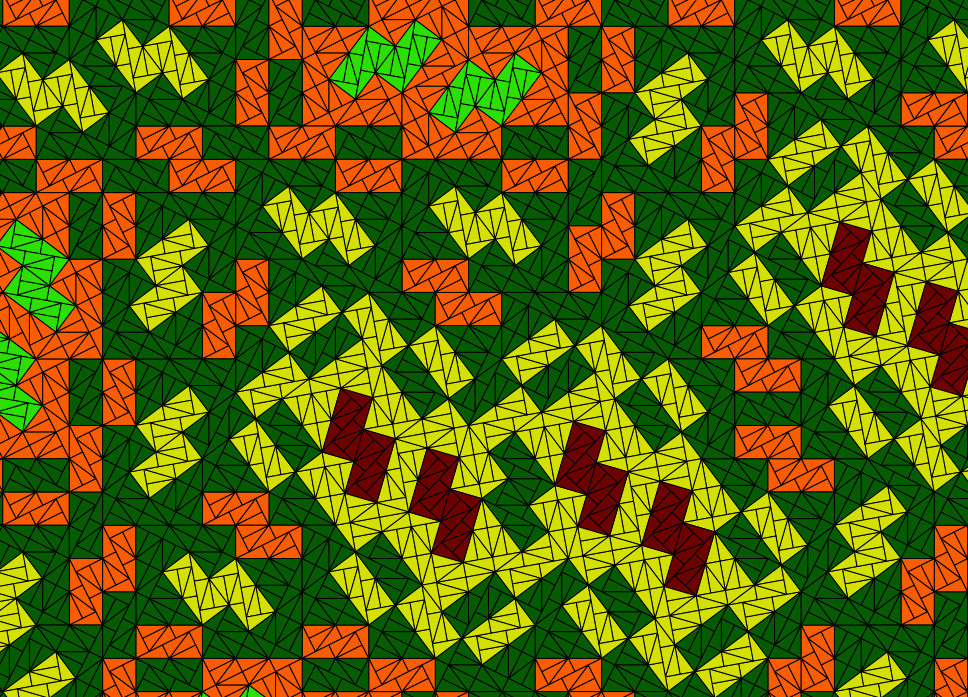
Oder dies:

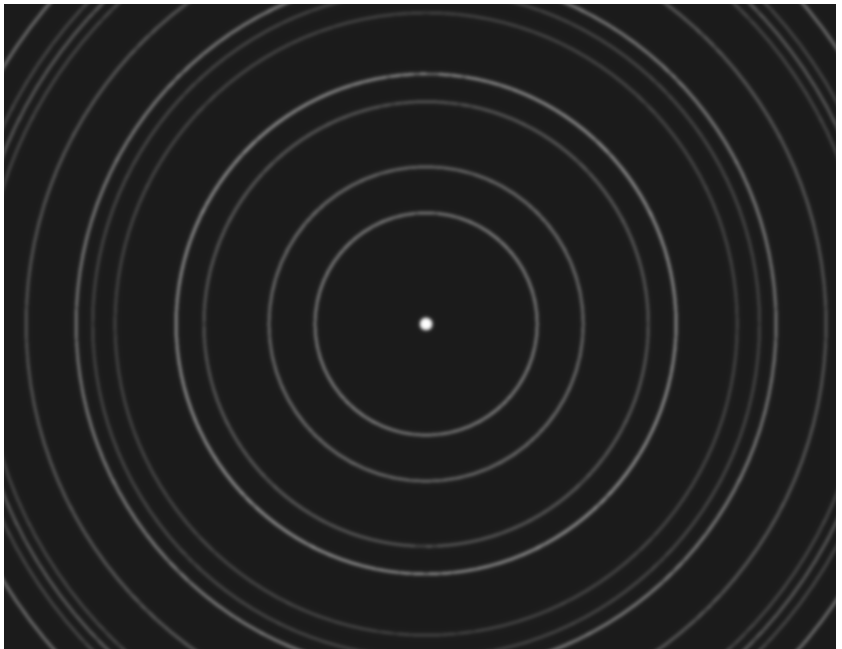
Conway's Pinwheel substitution (1991):

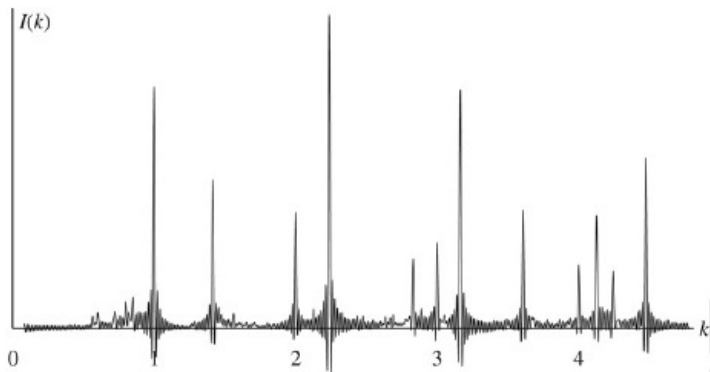


In dieser Pflasterung tauchen die Steine in unendlich vielen verschiedenen Richtungen auf! Im nächsten Bild ein Ausschnitt der Pflasterung, Farben kodieren die verschiedenen Richtungen.

Die Bilder danach zeigen die Diffraktion dieser Pflasterung.

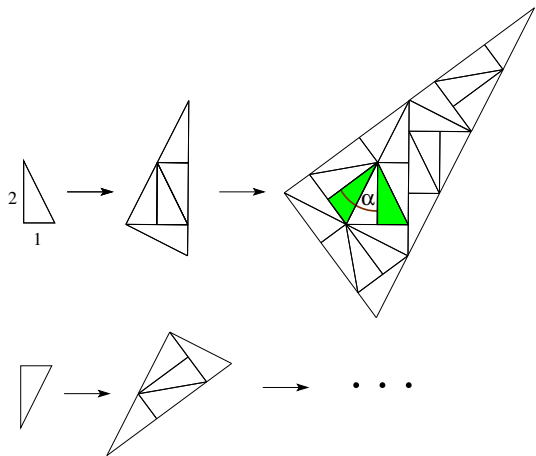






M. Baake, D. Frettlöh, U. Grimm: Pinwheel patterns and powder diffraction, *Phil. Mag.* 87 (2007) 2831-2838

M. Baake, D. Frettlöh, U. Grimm: A radial analogue of Poisson's summation formula with applications to powder diffraction and pinwheel patterns, *J. Geom. Phys.* 57 (2007) 1331-1343



The angle α is *irrational*; that is,
 $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$.

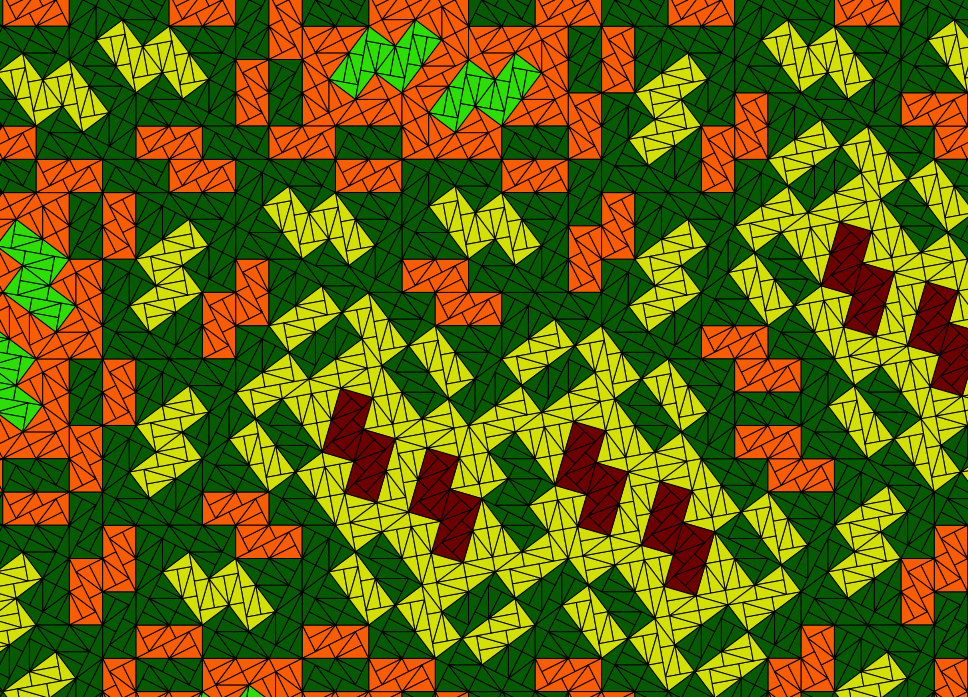
For pinwheel tilings: Orientations are dense in $[0, 2\pi[$.

Even more: orientations are equidistributed in $[0, 2\pi[$.

This is true not only for the pinwheel tiling:

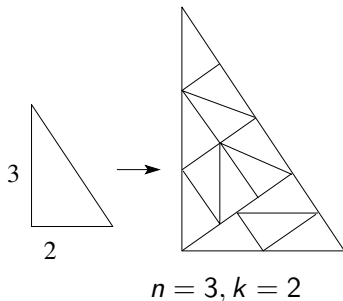
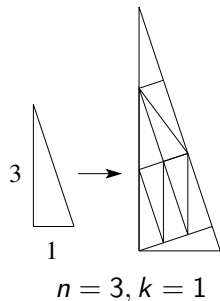
Theorem (F. '08)

In each primitive substitution tiling with tiles in infinitely many orientations, the orientations are equidistributed in $[0, 2\pi[$.



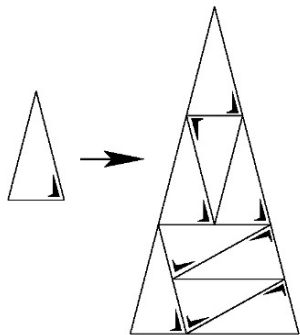
Weitere Beispiele mit diesem Effekt (Steine in unendlich vielen verschiedenen Richtungen, und alle Richtungen "gleich häufig")

Pinwheel (n, k)



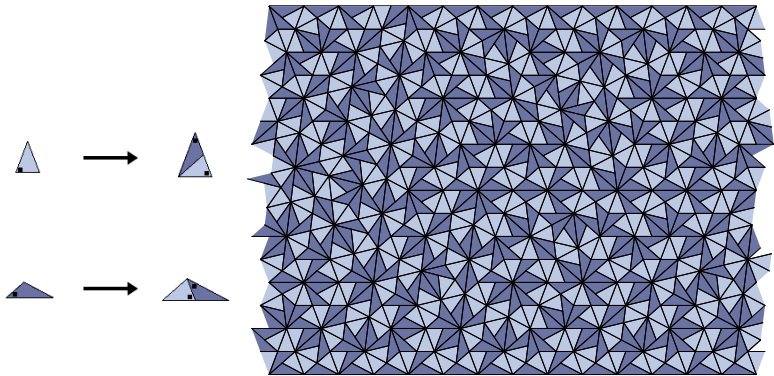
etc.

Unknown (≤ 1996 , Penrose? Danzer?):

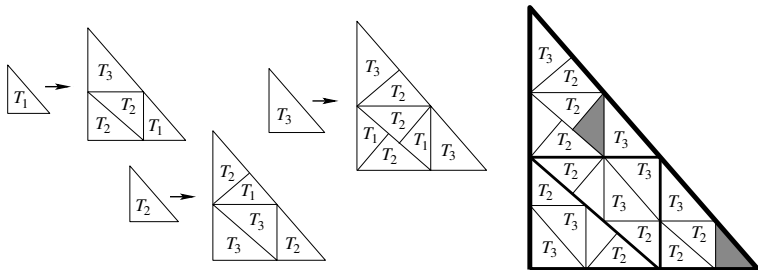


(+ obvious generalizations)

C. Goodman-Strauss, L. Danzer (ca. 1996):

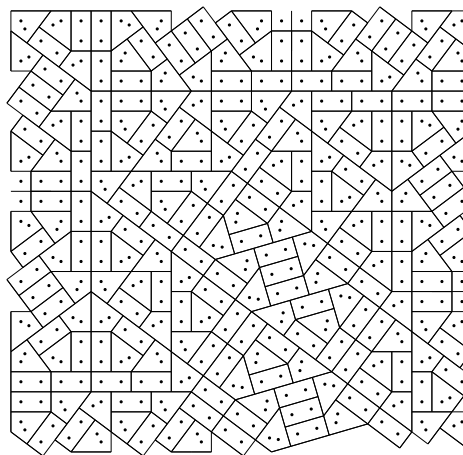
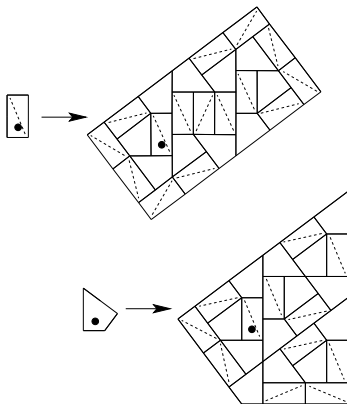


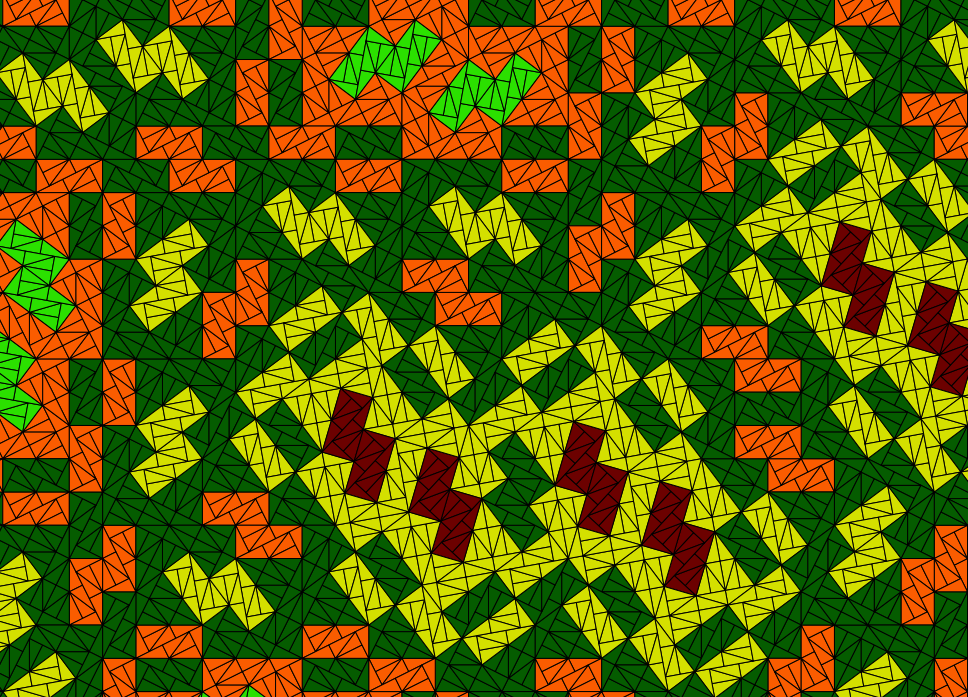
Pythia (m, j) , here: $m = 3, j = 1$.



So far: tiles are always triangles. One exception:

Kite Domino (equivalent with Pinwheel):





Can we find examples with rhombic tiles for instance?

Answer: No.

Theorem (F.-Harriss, 2013)

Let \mathcal{T} be a tiling in \mathbb{R}^2 with finitely many prototiles (i.e., finitely many different tile shapes). Let all prototiles be centrally symmetric convex polygons (i.e., $P = -P$). Then each prototile occurs in a finite number of orientations in \mathcal{T} .

Can we find examples with rhombic tiles for instance?

Answer: No.

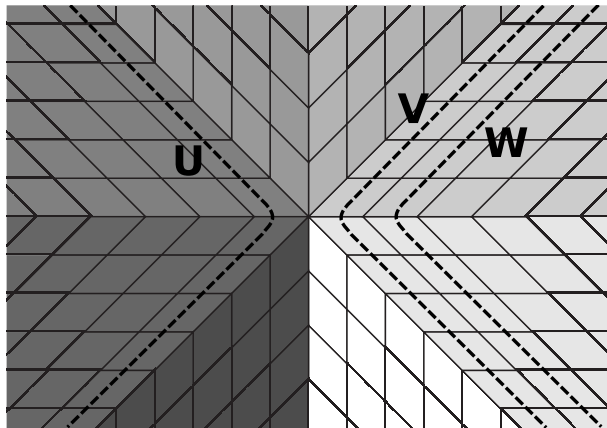
Theorem (F.-Harriss, 2013)

Let \mathcal{T} be a tiling in \mathbb{R}^2 with finitely many prototiles (i.e., finitely many different tile shapes). Let all prototiles be centrally symmetric convex polygons (i.e., $P = -P$). Then each prototile occurs in a finite number of orientations in \mathcal{T} .

Theorem (F.-Harriss, 2013)

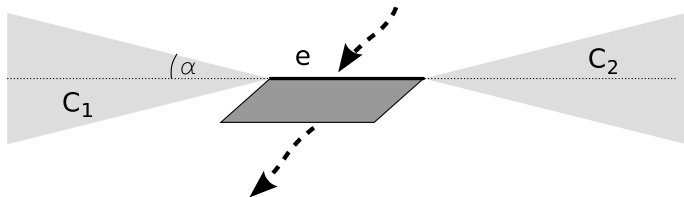
Let \mathcal{T} be a tiling in \mathbb{R}^2 with finitely many parallelograms as prototiles. Then each prototile occurs in a finite number of orientations in \mathcal{T} .

Assume all tiles are vertex-to-vertex.



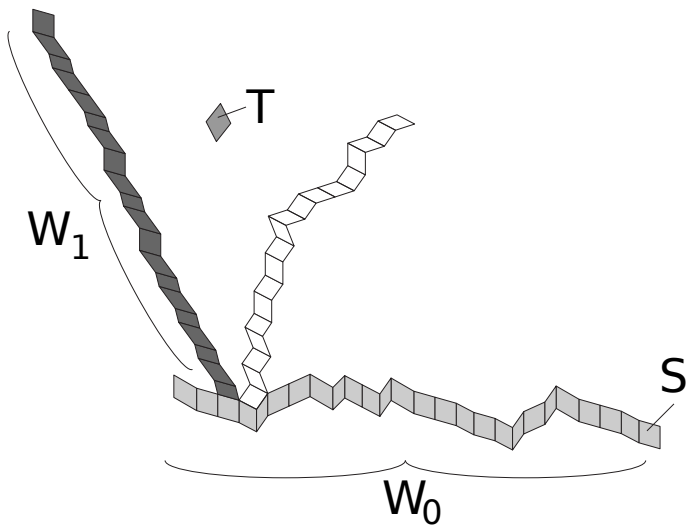
A *worm* is a sequence of tiles $\dots, T_{-1}, T_0, T_1, T_2, \dots$ where T_k and T_{k+1} share a common edge, and all shared edges are parallel.

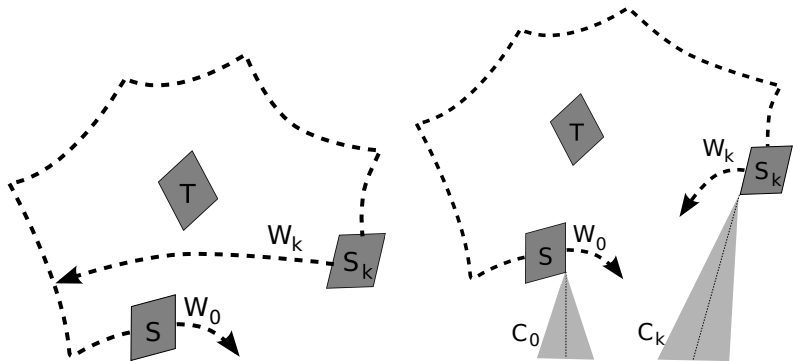
Cone Lemma: A worm defined by edge e cannot enter C_1 or C_2 .
(α the minimal interior angle in the prototiles)



Loop Lemma: A worm has no loop.

Travel Lemma: Any two tiles can be connected by a finite sequence of finite worm pieces. (At most $k = \lceil \frac{2\pi}{\alpha} \rceil$ many.)





Proof of theorem (parallelogram version): Fix some tile S . Every tile T can be connected to S by at most $\lceil \frac{2\pi}{\alpha} \rceil$ worm pieces. That is, with $\lceil \frac{2\pi}{\alpha} \rceil$ turns. \square

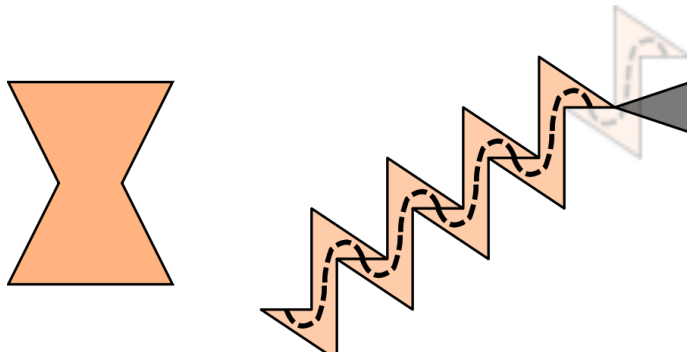
Proof of theorem (parallelogram version): Fix some tile S . Every tile T can be connected to S by at most $\lceil \frac{2\pi}{\alpha} \rceil$ worm pieces. That is, with $\lceil \frac{2\pi}{\alpha} \rceil$ turns. \square

Proof of theorem (general): Any centrally symmetric convex polygon can be dissected into parallelograms.
(see e.g. Kannan-Soroker 1992)

Proof of theorem (parallelogram version): Fix some tile S . Every tile T can be connected to S by at most $\lceil \frac{2\pi}{\alpha} \rceil$ worm pieces. That is, with $\lceil \frac{2\pi}{\alpha} \rceil$ turns. \square

Proof of theorem (general): Any centrally symmetric convex polygon can be dissected into parallelograms. (see e.g. Kannan-Soroker 1992)

- ▶ Probably true in higher dimensions
- ▶ Also true for non-convex? Hmm...



D. Frettlöh, E. Harriss: Parallelogram tilings, worms, and finite orientations, *Discrete and Computational Geometry* 49 (2013) 531-539.

Dies letzte ist ein sehr einfach zu erklärendes Projekt (dafür dass es reine Mathematik ist). In dem Sinne ist es sehr untypisch. Viele Resultate in reiner Mathematik sind viel schwieriger zu erklären.

D. Frettlöh, E. Harriss: Parallelogram tilings, worms, and finite orientations, *Discrete and Computational Geometry* 49 (2013) 531-539.

Dies letzte ist ein sehr einfach zu erklärendes Projekt (dafür dass es reine Mathematik ist). In dem Sinne ist es sehr untypisch. Viele Resultate in reiner Mathematik sind viel schwieriger zu erklären.

Andererseits ist dies ein typisches Beispiel für diskrete Mathematik. Die (neben Logik) am ehesten den Grenzbereich zwischen Mathe und Informatik darstellt, und wo einige meiner Lieblingsinformatiker sich tummeln: John Conway, Don Knuth, Paul Erdős...

Damit sind wir am

ENDE

Ich hoffe, Sie hatten auch nur halbwegs soviel Spaß wie ich.

